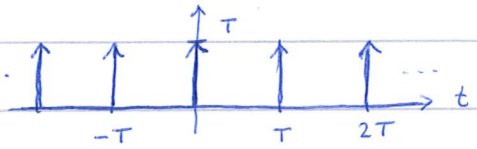
Fö6

Periodiska distributioner

Låt $T>0$. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ kallas <u>T-periodisk</u> om $u(t) = u(t-T)$.

<u>Rummet</u> $\mathcal{D}'_T = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ;\ u \text{ T-per.} \}$.

<u>Ex</u>
- Funktioner i L^1_T ger upphov till distr. i $\mathcal{D}'_T$.
- Pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}$:

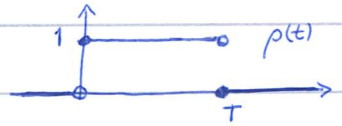


som def. av: $\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\varphi(nT)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

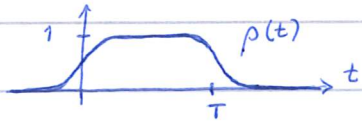
<u>Medelvärdet</u> "$\fint_T u(t)dt$" av $u \in \mathcal{D}'_T$:

En funktion $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ med kompakt stöd kallas för en <u>etta över en period</u> om $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(t+nT) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

T. ex.:



,



.

<u>Def</u> för $u \in \mathcal{D}'_T$: $\fint_T u(t)dt = \frac{1}{T}\langle u, \rho \rangle$, där ρ är en C^∞ etta över en period.

Sats Den trig. serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$ tillhör D'_T om följden c_n har högst polynomiell tillväxt, dvs om $|c_n| \leq C|n|^k$, $n \neq 0$, för några konstanter C, k.

Dess verkan på $\varphi \in D(\mathbb{R})$ definieras av:

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e^{in\Omega t}, \varphi \rangle.$$

B Se komp.

Fourierserier för per. dist.

Def Låt $u \in D'_T$. u:s f.k.: $\hat{u}(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

u:s f.s.: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}$.

Ex $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}$. $\hat{u}(n) = ?$

$$\hat{u}(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t} dt = \frac{1}{T} \langle u(t) e^{-in\Omega t}, \underbrace{\rho(t)}_{\text{etta över en per.}} \rangle =$$

$$= \frac{1}{T} \langle u(t), e^{-in\Omega t} \rho(t) \rangle = \frac{1}{T} \left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} T\delta_{mT}, e^{-in\Omega t} \rho(t) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T \underbrace{e^{-in\Omega mT}}_{=1, \text{ ty } \Omega T = 2\pi.} \rho(mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(mT) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

av def. av etta över en period.

högst poly. tillv.

Ex $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$. $\hat{u}(n) = ?$

etta över en per.

$$\hat{u}(n) = /\text{ som förra ex. }/ = \frac{1}{T}\langle u(t), e^{-in\Omega t}\rho(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{T}\left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\Omega t}, e^{-in\Omega t}\rho(t)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \langle e^{im\Omega t}, e^{-in\Omega t}\rho(t)\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \underbrace{\int_T e^{im\Omega t} e^{-in\Omega t}\,dt}_{=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}} =$$

$$= c_n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Sats $u \in D'_T \Rightarrow$ Följden $\hat{u}(n)$ har högst poly. tillväxt, och $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}$.

B Se komp.

Ex $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}$.

Sats Räkneregler för four. koeff. (sats 4.10) gäller om $u, v \in D'_T$.

B av $(u')^\wedge(n) = in\Omega\hat{u}(n)$: Låt $u \in D'_T$.
Då gäller att $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\Omega t}$, så $u' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)\, in\Omega e^{in\Omega t}$,
så $\widehat{u'}(n) = in\Omega\hat{u}(n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Periodisk faltning funkar också bra i D'_T, se 6.11.

Summering av vissa serier

Ex Bestäm $G = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3n+1}$.

Sätt $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3n+1} e^{int}$. $u \in \mathcal{D}'_T$ med $T = 2\pi$, $\Omega = 1$.

$$u' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3n+1} \cdot ine^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in}{3n+1} e^{int}, \text{ så}$$ / matcha täljaren med nämnaren... /

$$-3iu' + u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-3i\cdot in + 1}{3n+1} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta_{2\pi n}.$$

Så $-3iu' + u = 2\pi\delta$ på $]-2\pi, 2\pi[$.

Lös denna ekv.: Hom: $u_h = Ce^{-it/3}$, $C \in \mathbb{C}$.

Part (mha sats 3.20): u_f hom. lösn. s.a. $u_f(0) = \frac{1}{-3i} = \frac{i}{3}$ ger $u_f(t) = \frac{i}{3} e^{-it/3}$. $f(t) = \frac{i}{3} e^{-it/3} \chi(t)$ ger $-3if' + f = \delta$, så $u_p = 2\pi f = \frac{2\pi i}{3} e^{-it/3} \chi$.

På $]-2\pi, 2\pi[$ är alltså $u = \frac{2\pi i}{3} e^{-it/3} \chi + Ce^{-it/3}$, ngt $C \in \mathbb{C}$.

Men u är 2π-periodisk: $u(t) = u(t-2\pi)$, så för $0 < t < 2\pi$ fås: $\frac{2\pi i}{3} e^{-it/3} + Ce^{-it/3} = Ce^{-i(t-2\pi)/3}$, så $C = \frac{2\pi i/3}{e^{2\pi i/3} - 1}$.

Alltså: $u = \frac{2\pi i}{3} e^{-it/3} \left(\chi + \frac{1}{e^{2\pi i/3} - 1} \right)$ på $]-2\pi, 2\pi[$.

Satsen om punktvis konv. ger (ty u har gen. hö- och vä-der. i 0)

$$G = \frac{u(0+) + u(0-)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi i}{3}\left(1 + \frac{1}{e^{2\pi i/3} - 1}\right) + \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{e^{2\pi i/3} - 1} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{3} \frac{e^{2\pi i/3} + 1}{e^{2\pi i/3} - 1} = \frac{\pi i}{3} \frac{e^{\pi i/3}(e^{\pi i/3} + e^{-\pi i/3})}{e^{\pi i/3}(e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3})} =$$

$$= \frac{\pi i}{3} \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{2i\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}}.$$

<u>Ex</u> Bestäm $u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{int} = e^{it} + e^{i2t} + e^{i3t} + \dots$.

$u \in D'_T$ med $T = 2\pi$, $\Omega = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{int} \overset{?}{=} \frac{e^{it}}{1-e^{it}} \overset{(t \neq 2\pi n)}{=} \frac{d}{dt}\, i\,\mathrm{Log}(1-e^{it}) \dots$

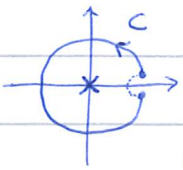
(principalgrenen)

Sätt $v(t) = i\,\mathrm{Log}(1-e^{it})$, $t \neq 2\pi n$, och $v(2\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

$v \in L^1_T$, och

$$\hat{v}(n) = \fint_T v(t) e^{-in\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{Log}(1-e^{it})\, e^{-int} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_C i\,\mathrm{Log}(1-z) z^{-n} \frac{dz}{iz}$$

$\left(\begin{array}{l} C: z = e^{it} \\ dz = ie^{it}dt \\ t: \varepsilon \to 2\pi - \varepsilon \end{array} \right.$  $\Big)$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z^{n+1}} =$$

(bara log. sing. i $z = 1$)

$$= i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^{n+1}} \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots \right) = \begin{cases} 0, & n \leq 0. \\ 1/in, & n > 0. \end{cases}$$

Sats 6.8 $\Longrightarrow$ $v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{in} e^{int}$ i distributionsmening,

så $v' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{int} = u$. Genom att konkret räkna ut

distributionsderivatan v' fås (se komp.):

$$u = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi \delta_{2\pi n} + i\,\mathrm{PV}\left(\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} \right).$$