Fö7

Fouriertransformen

Def Låt $u \in L^1(\mathbb{R})$. u:s fouriertransform:

$$\hat{u}(\omega) = (\mathcal{F}u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t}\, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ex $u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ $\quad \hat{u} = ?$

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ex $u(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$. $\quad \hat{u} = ?$

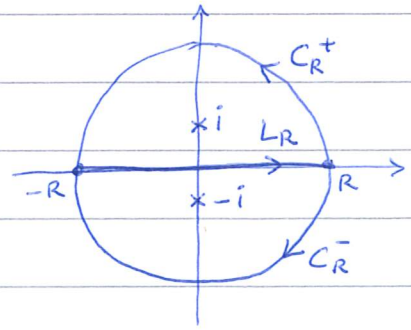
$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2+1}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2+1}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\, dz,$$

där L_R är sträckan $z = t$, $t: -R \to R$:

$|e^{-i\omega z}| = |e^{-i\omega(\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z)}| = e^{\omega\, \mathrm{Im}\, z}$, så

på C_R^+: $|e^{-i\omega z}| \leq 1$ då $\omega \leq 0$,

och på C_R^-: $|e^{-i\omega z}| \leq 1$ då $\omega \geq 0$.



$$\omega \geq 0: \int_{L_R + C_R^-} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\, dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1} = -2\pi i \frac{e^{-i\omega(-i)}}{2(-i)} = \pi e^{-\omega},$$

$$\left| \int_{C_R^-} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\, dz \right| \leq \int_{C_R^-} \left| \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1} \right| |dz| \leq \frac{1}{R^2-1} \pi R \to 0 \text{ då } R \to \infty,$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega) = \pi e^{-\omega}, \quad \omega \geq 0.$$

$$\omega \leq 0: \int_{L_R + C_R^+} \cdots \quad \Rightarrow \hat{u}(\omega) = \pi e^{\omega}, \quad \omega \leq 0.$$

Alltså: $\hat{u}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Räkneregler

Sats	$u(t) + v(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$\hat{u}(\omega) + \hat{v}(\omega)$	
	$\vdots$		$\vdots$	
$(*)$	$u(at)$		$\frac{1}{a}\hat{u}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$(a>0)$
$(**)$	$u(t-a)$		$e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$	$(a \in \mathbb{R})$
$(***)$	$e^{iat}u(t)$		$\hat{u}(\omega - a)$	$(a \in \mathbb{R})$
	$u'(t)$		$i\omega\hat{u}(\omega)$	
	$tu(t)$		$i\hat{u}'(\omega)$	

B Se komp.

Ex $u(t) = \dfrac{e^{i3t}}{4t^2+4t+2}$, $t \in \mathbb{R}$. $\hat{u} = ?$

$u(t) = \dfrac{e^{i3t}}{(2t+1)^2+1}$. Tabell och räkneregler:

$$\frac{1}{t^2+1} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi e^{-|\omega|}$$

/(**), a = -1/

$$\frac{1}{(t+1)^2+1} \qquad e^{i\omega}\pi e^{-|\omega|} = \pi e^{i\omega - |\omega|}$$

/(*), a = 2/

$$\frac{1}{(2t+1)^2+1} \qquad \frac{1}{2}\pi e^{i(\omega/2) - |\omega/2|} = \frac{\pi}{2} e^{(i\omega - |\omega|)/2}$$

/(***), a = 3/

$$\frac{e^{i3t}}{(2t+1)^2+1} \qquad \frac{\pi}{2} e^{(i(\omega-3) - |\omega-3|)/2} = \hat{u}(\omega)$$

Ex (7.6) $u(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\hat{u}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Se komp.

Ex Bestäm en lösning y till $y'(t) + y(t) = 2e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, m.h.a. fouriertransform.

$\widehat{VL}(\omega) = \widehat{HL}(\omega)$ ger: $i\omega\hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega) = \dfrac{4}{1+\omega^2}$, $\omega \in \mathbb{R}$,

så $\hat{y}(\omega) = \dfrac{4}{(1+\omega^2)(1+i\omega)} = \dfrac{4}{(1-i\omega)(1+i\omega)^2} = /PBU/$

$$= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} + \frac{2}{(1+i\omega)^2}.$$

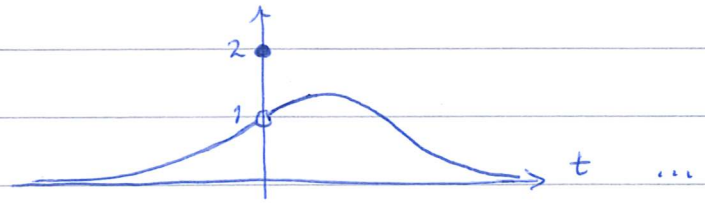
Tabell: $e^{t}\chi(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{1-i\omega}$

$e^{-t}\chi(t)$ $\qquad \dfrac{1}{1+i\omega}$

$/\, tu(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\hat{u}'(\omega) /$

$te^{-t}\chi(t)$ $\qquad i\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{1}{1+i\omega}\right) = \dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$

Funktionen $e^{t}\chi(-t) + e^{-t}\chi(t) + 2te^{-t}\chi(t)$ har rätt transform, men graf



...

Värdet i $t=0$ ska vara 1.

<u>Svar:</u> $y(t) = \begin{cases} (1+2t)e^{-t}, & t \geq 0, \\ e^{t}, & t \leq 0. \end{cases}$

Egenskaper hos $\mathcal{F}$

Sats $u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u}$ likformigt kontinuerlig, begränsad, och $\hat{u}(\omega) \to 0$ då $\omega \to \pm\infty$.

B Se komp.

Sats(er)
- $u \in C^k(\mathbb{R})$, $u, u', \dots, u^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |\hat{u}(\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|^k}$, $\omega \neq 0$.
- $u, tu, \dots, t^k u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in C^k(\mathbb{R})$.

B Se komp.

Fouriers inversionsformel

Sats $u \in L^1(\mathbb{R})$, u har gen. höger- och vänsterderivata i en punkt $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega) e^{i\omega a} \, d\omega = \frac{u(a+) + u(a-)}{2}.$$

B Se komp.

Om $U \in L^1(\mathbb{R})$ definieras dess <u>inverstransform</u> $\mathcal{F}^{-1}U$ genom:

$$(\mathcal{F}^{-1}U)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Om, till exempel, $u \in L^1(\mathbb{R})$ är deriverbar och $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ så gäller att $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u) = u$ (el: $\hat{\hat{u}} = 2\pi \check{u}$).

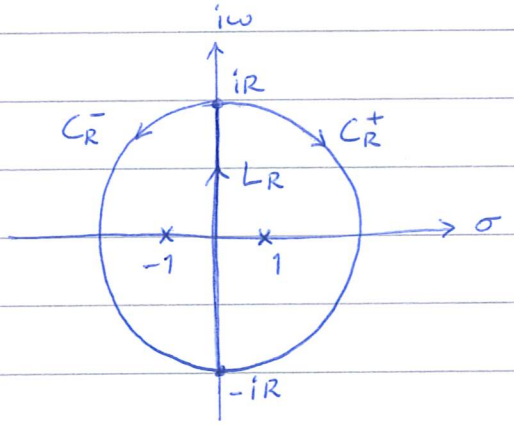
(enl. satsen)

<u>Ex</u> Bestäm $y(t)$ så att $\hat{y}(\omega) = \dfrac{4}{(1-i\omega)(1+i\omega)^2}$.

Sätt (enligt inversionsformeln)

$$y(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{4}{(1-i\omega)(1+i\omega)^2} e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{4e^{st}}{(1-s)(1+s)^2}\, ds$$



s-planet, $s = \sigma + i\omega$.

L_R: $s = i\omega$, $\omega: -R \to R$,
$ds = i\,d\omega$.

$|e^{st}| = e^{\sigma t} \Rightarrow$ Återvänd längs C_R^- då $t \geq 0$.
C_R^+ då $t \leq 0$.

Residysatsen + uppskattningar ger:

$$y(t) = \begin{cases} t \geq 0: \ \operatorname*{Res}_{s=-1} \dfrac{4e^{st}}{(1-s)(1+s)^2} = \dfrac{1}{1!}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{4e^{st}}{1-s}\right)\Bigg|_{s=-1} = \ldots = (1+2t)e^{-t}, \\[2ex] t \leq 0: \ -\operatorname*{Res}_{s=1} \dfrac{4e^{st}}{(1-s)(1+s)^2} = -\dfrac{4e^{st}}{(-1)(1+s)^2}\Bigg|_{s=1} = e^{t}. \end{cases}$$

Entydighet

Sats $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ s.a. $\hat{u}(\omega) = \hat{v}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $u(t) = v(t)$ i alla $t \in \mathbb{R}$ där både u och v är kont.

B Är följdsats till:

Sats $u \in L^1(\mathbb{R})$ s.a. $u(a+)$ och $u(a-)$ existerar

$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\omega|}{R}\right) \hat{u}(\omega) e^{i\omega a} \, d\omega = \frac{u(a+) + u(a-)}{2}.$$

B Se komp.

Följdsats Inversionsformeln ger "rätt" värde om $\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega) e^{i\omega a} \, d\omega$ existerar (ändligt), se 7.15.