Fö 8

Faltning och fouriertransform

Sats $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och minst en av dem begränsad

$\Rightarrow$ $u * v$ kontinuerlig, begränsad och $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

och: $(u*v)^\wedge(\omega) = \hat{u}(\omega)\hat{v}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

B $u*v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: se komp.

$$(u*v)^\wedge(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (u*v)(t)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\, dr \right) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r) e^{-i\omega(t-r)} v(r) e^{-i\omega r}\, dr\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r) e^{-i\omega(t-r)}\, dt \right) v(r) e^{-i\omega r}\, dr =$$

$$= \hat{u}(\omega)\hat{v}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ex Sätt $f_a(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2+a^2}$, $t \in \mathbb{R}$. $f_a * f_b = ?$ $(a, b > 0)$

f_a begränsad och $f_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Tabell: $\widehat{f_a}(\omega) = e^{-a|\omega|}$, $\omega \in \mathbb{R}$, så

$$\widehat{f_a * f_b}(\omega) = \widehat{f_a}(\omega)\widehat{f_b}(\omega) = e^{-a|\omega|} e^{-b|\omega|} = e^{-(a+b)|\omega|} =$$

$$= \widehat{f_{a+b}}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Alltså är $f_a * f_b = f_{a+b}$.

<u>Ex</u> Bestäm en lösning till $\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)\, e^{-r^2/2}\, dr = e^{-t^2/4}$, $t \in \mathbb{R}$.

Obs: VL är $u * f$, där $f(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\widehat{VL}(\omega) = \widehat{HL}(\omega)$ ger (mha tabell):

$$\hat{u}(\omega)\sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2} = \sqrt{4\pi}\, e^{-\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

så $\hat{u}(\omega) = \sqrt{2}\, e^{-\omega^2/2}$.

Tabell: $u(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Kontroll: Sätt in u i VL:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t-r)^2/2} e^{-r^2/2}\, dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + tr - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}}\, dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r-\frac{t}{2})^2 - \frac{t^2}{4}}\, dr = \frac{e^{-t^2/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\, dr =$$

Tabell: $e^{-at^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$,

dvs $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$.

$a = 1$ och $\omega = 0$ ger $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

$$= \frac{e^{-t^2/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = e^{-t^2/4} = HL. \quad \text{ok!}$$

Parsevals formel

Rummet $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ u \in C_{sty}(\mathbb{R});\ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt < \infty \right\}$

Skalärprodukt på $L^2(\mathbb{R})$: $\langle u | v \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}\, dt$, $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.

Norm: $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u | u \rangle_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$, $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Obs: $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$ (t.ex. $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \in L^2(\mathbb{R})$ men $\notin L^1(\mathbb{R})$).

Approximationsteori i $L^2(\mathbb{R})$ ...
(Samplingsteoremet (se 8.6), wavelets ...)

Parsevals formel $u, v \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u}, \hat{v} \in L^2(\mathbb{R})$,

och $$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\, d\omega,$$

speciellt: $$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2\, d\omega.$$

B Om inversionsformeln gäller och man kan byta integrationsordning så:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \right)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{\hat{v}(\omega)}\, e^{-i\omega t}\, d\omega\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t}\, dt \right) \overline{\hat{v}(\omega)}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\, d\omega.$$ (Resten: se komp.)

Ex Vad ger Parsevals formel då $u(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$?

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\, dt \overset{\omega \neq 0}{=}$$

$$= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} = \frac{-2i \sin\omega}{-i\omega} =$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega}. \quad (\omega \neq 0)$$

Parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2\, d\omega,$

vilket ger $\displaystyle\int_{-1}^{1} |1|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2\sin\omega}{\omega} \right|^2 d\omega,$

så: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\, d\omega = \pi.$

Ex Om $u \in L^1(\mathbb{R})$ är kontinuerligt deriverbar och $u' \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ så gäller att (för $R > 0$)

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \right| \le \frac{\|u'\|_2}{\sqrt{\pi R}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se komp.

Ett svängningsproblem

$$\begin{cases} u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, & x,t \in \mathbb{R} \quad \text{(DE)} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \quad \text{(B1)} \\ u'_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \quad \text{(B2)} \end{cases}$$

Sätt $U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx.$

VL (DE): $\int_{-\infty}^{\infty} u''_{tt}(x,t) e^{-i\omega x} dx = U''_{tt}(\omega,t)$

HL (DE): $\int_{-\infty}^{\infty} c^2 u''_{xx}(x,t) e^{-i\omega x} dx =$

$$= (-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} c^2 u(x,t) e^{-i\omega x} (-i\omega)^2 dx =$$

$$= -\omega^2 c^2 U(\omega,t)$$

VL (B1): $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-i\omega x} dx = U(\omega,0)$

VL (B2): $\int_{-\infty}^{\infty} u'_t(x,0) e^{-i\omega x} dx = U'_t(\omega,0)$

Transformer av f,g: $F(\omega)$, $G(\omega)$.

Alltså: $\begin{cases} U''_{tt} = -\omega^2 c^2 U, & \omega, t \in \mathbb{R} \\ U(\omega, 0) = F(\omega), & \omega \in \mathbb{R} \\ U'_t(\omega, 0) = G(\omega), & \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$

Kar.ekv.: $r^2 = -\omega^2 c^2 \Rightarrow r = \pm i\omega c$

$$\Rightarrow \quad U(\omega, t) = A(\omega)\cos \omega ct + B(\omega)\sin \omega ct.$$

$$U'_t(\omega, t) = -A(\omega)\omega c \sin \omega ct + B(\omega)\omega c \cos \omega ct$$

$$\Rightarrow \quad A(\omega) = F(\omega),$$
$$B(\omega)\omega c = G(\omega).$$

Detta ger: $U(\omega, t) = F(\omega)\cos \omega ct + \frac{G(\omega)}{\omega c}\sin \omega ct =$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct}\right)F(\omega) + \frac{\sin \omega ct}{\omega c}G(\omega).$$

Tabell: $h(x) = \frac{1}{2c}\begin{Bmatrix} 1, & |x| \le ct \\ 0, & |x| > ct \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{map. } x]{\mathcal{F}} \frac{\sin \omega ct}{\omega c}$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

"d'Alemberts formel".