Fö 9

Fouriertransform och distributioner

Sats $u, \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{\varphi}(t)\,dt.$

B $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}dt\right)\varphi(\omega)d\omega =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{\varphi}(t)dt.$$

Tolkat distributionsmässigt: " $\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle$ ".

Men: $\varphi \in D(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in D(\mathbb{R})$ ...

Tempererade distributioner

Rummet $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R});\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k \varphi^{(l)}(t)| < \infty,\ k, l \in \mathbb{N}\}$,

"schwartztestfunktioner".

Ex: $\varphi(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

$D(\mathbb{R}) \subseteq S$, och $D(\mathbb{R})$ är "tätt" i S (se sats 9.3).

<u>Rummet S'</u> $= \{ u : S \to \mathbb{C} \,;\, u$ linjär + ett kont. villkor$\}$,

"tempererade distributioner".

Eftersom $D(\mathbb{R}) \subseteq S$ så "$S' \subseteq D'(\mathbb{R})$":

$$\begin{tikzcd} D(\mathbb{R}) \arrow[r, "\text{inklusion}"] \arrow[dr, dashed, "D'(\mathbb{R}) \ni u^{D'}"'] & S \arrow[d, "u \in S'"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Avbildningen $u \mapsto u^{D'}$ från S' till $D'(\mathbb{R})$ är linjär och injektiv.

Vilka funktioner ger upphov till distributioner i S'?
Jo: begränsade fkn, polynom, fkn i $L^1(\mathbb{R})$ och $L^2(\mathbb{R})$, ...
(se 9.6, 9.7), men <u>inte</u> (se 9.8) e^{at} $(0 \neq a \in \mathbb{R})$.

<u>Diracimpulsen</u> δ som tempererad distr.: $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, $\varphi \in S$.

<u>Operationer på S'</u>

"multiplikator på S'", se 9.12.

$u \mapsto u'$, $u \mapsto fu$, $u \mapsto u(at+b)$ och $u \mapsto \bar{u}$
är operationer på S'.

<u>Ex</u> $\underline{t}^{-1}$ är tempererad, ty $\underline{t}^{-1} = (\ln|t|)'$ och
$\ln|t|$ är tempererad (enl. sats 9.6).

Fouriertransform av temp. distr.

Sats Fouriertransformen $\mathcal{F}: S \to S$ är linjär och inverterbar (och kont.).

B Se komp.

Def Låt $u \in S'$. u:s fouriertransform, $\hat{u}$ eller $\mathcal{F}u$, ges av $\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle$, $\varphi \in S$.

Ex $\delta \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$\langle \hat{\delta}(\omega), \varphi(\omega) \rangle = \langle \delta(t), \hat{\varphi}(t) \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega \cdot 0} d\omega =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega = \langle 1(\omega), \varphi(\omega) \rangle, \quad \varphi \in S.$$

Alltså: $\hat{\delta} = 1$.

Ex $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$ (1: den fkn som är 1 för alla $t \in \mathbb{R}$.)

$$\langle \hat{1}(\omega), \varphi(\omega) \rangle = \langle 1(t), \hat{\varphi}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t) dt =$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t) e^{i0t} dt = 2\pi \varphi(0) = \langle 2\pi \delta(\omega), \varphi(\omega) \rangle, \quad \varphi \in S.$$

inversionsformeln

Alltså: $\hat{1} = 2\pi \delta$.

Sats Fouriertransformen $\mathcal{F}: S' \to S'$ är linjär och inverterbar (och kont.).

B Se komp.

Sats (9.10 och 9.19) $u \in D'(\mathbb{R})$, u har kompakt stöd

$\Rightarrow$ u är tempererad och $\hat{u}$ ges av funktionen $U(\omega) = \langle u(t), e^{-i\omega t} \rangle$, $\omega \in \mathbb{R}$, som är en multiplikator på S'.

B Se komp.

Sats (9.11 och 9.20) $u \in D'_T$ (T-periodisk)

$\Rightarrow$ u är tempererad, och

$$\hat{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta_{n\Omega}.$$

$\Omega = 2\pi/T$

u:s n:te fourierkoefficient

B Se komp.

Räkneregler

Sats Räkneregler för fouriertransformen (sats 7.4) gäller om $u, v \in S'$.

B av $e^{iat}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\omega - a)$ $(a \in \mathbb{R})$:

Antag att $u \in S'$ och $a \in \mathbb{R}$. För $\varphi \in S$ har vi:

$$\langle (e^{iat}u(t))^\wedge(\omega), \varphi(\omega) \rangle = \langle e^{iat}u(t), \hat{\varphi}(t) \rangle =$$

$$= \langle u(t), e^{iat}\hat{\varphi}(t) \rangle =$$

$$\Big/ \; e^{iat}\hat{\varphi}(t) = e^{iat}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i(\omega - a)t} d\omega =$$

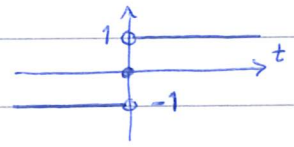
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega + a) e^{-i\omega t} d\omega = (\varphi(\omega + a))^\wedge(t). \; \Big/$$

$$= \langle u(t), (\varphi(\omega + a))^\wedge(t) \rangle = \langle \hat{u}(\omega), \varphi(\omega + a) \rangle =$$

$$= \langle \hat{u}(\omega - a), \varphi(\omega) \rangle.$$

Ex $\operatorname{sgn} t \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$\left(\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \right.$$



$\Big)$

Obs: $\operatorname{sgn}' = 2\delta$.

$\mathcal{F}$ av detta ger $(\operatorname{sgn}')^\wedge = 2\hat{\delta}$, $i\omega\,\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) = \underbrace{2}_{(= \omega \cdot 2\underline{\omega}^{-1})}$,

$$\omega\left(\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) + 2i\underline{\omega}^{-1}\right) = 0,$$

så $\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) + 2i\underline{\omega}^{-1} = C\delta(\omega)$, ngt $C \in \mathbb{C}$.

VL är udda, $\delta(\omega)$ är jämn $\Rightarrow$ $C = 0$.

Alltså: $\operatorname{sgn} t \xrightarrow{\mathcal{F}} -2i\underline{\omega}^{-1}$.

Ex Lös $y'' + 2y' + y = \delta$ i S' och i $D'(\mathbb{R})$.

OBS: Alla lösningar i S' fås med $\mathcal{F}$, ty

$$y'' + 2y' + y = \delta,\ y \in S' \iff (i\omega)^2 \hat{y} + 2i\omega\hat{y} + \hat{y} = 1,\ \hat{y} \in S'.$$

Vi får $(1+i\omega)^2 \hat{y} = 1$, $\hat{y} = \frac{1}{(1+i\omega)^2}$, /tabell och räkneregler/

$y = te^{-t}\chi(t)$.

Alla lösningar i S' är alltså: $y = te^{-t}\chi(t)$.

Hom.ekv. $y'' + 2y' + y = 0$ har lösningarna $y = (Ct + D)e^{-t}$ i $D'(\mathbb{R})$, så alla lösningar i $D'(\mathbb{R})$ är:

$$y = te^{-t}\chi(t) + (Ct + D)e^{-t},\quad C, D \in \mathbb{C}.$$

Ex Lös $y' + iy = \delta$ i S' och i $D'(\mathbb{R})$.

$$y' + iy = \delta,\ y \in S' \iff i\omega\hat{y} + i\hat{y} = 1,\ \hat{y} \in S'.$$

Vi får $(\omega + 1)\hat{y} = -i$, ..., $\hat{y} = -i(\underline{\omega + 1})^{-1} + C\delta_{-1}(\omega)$,

$$y = \ldots = \frac{1}{2}e^{-it}\operatorname{sgn} t + \frac{C}{2\pi}e^{-it},\quad C \in \mathbb{C},$$

som alltså är alla lösningar i S'.

Hom.ekv. $y' + iy = 0$ har lösningarna $y = De^{-it}$ i $D'(\mathbb{R})$, så samma lösningar i $D'(\mathbb{R})$ som i S' (för $y' + iy = \delta$).

Faltning

Def För $u \in S'$ och $\varphi \in S$:

$$(u * \varphi)(t) = \langle u(t-r), \varphi(r) \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sats(er) $u \in S'$, $\varphi \in S \Rightarrow u * \varphi$ är multiplikator på S',

och $\widehat{u * \varphi} = \hat{u}\hat{\varphi}$ och $\widehat{u\varphi} = \frac{1}{2\pi} \hat{u} * \hat{\varphi}$.

B Se komp.

S ett LTI-system, h dess impulssvar. Antag att $h \in S'$.
Då kallas $\hat{h}(\omega)$ för <u>frekvensfunktionen</u> eller <u>överföringsfunktionen</u> för systemet.

$$\underbrace{y}_{\text{utsignal}} = Sx = h * \underbrace{x}_{\text{insignal}}$$

ger $\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega)$.