Fö 10

Laplacetransformen

Def Låt $u \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$. u:s laplacetransform, $\hat{u}$ eller $\mathcal{L}u$:

$$\hat{u}(s) = (\mathcal{L}u)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt,$$

definierad för $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ s.a. integralen är abs. konv.

Ex $u(t) = e^t \chi(t)$ ger

$$\hat{u}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t \chi(t) e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t}\,dt \overset{s\neq 1}{=} \left[\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)}\right]_0^{\infty} \overset{\operatorname{Re} s>1}{=}$$

$$= \frac{1}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

$v(t) = -e^t \chi(-t)$ ger ... $\hat{v}(s) = \frac{1}{s-1}$, $\operatorname{Re} s < 1$.

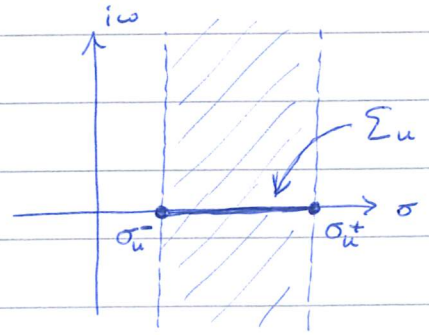
Definitionsmängden för $\hat{u}$ ges av $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u$, där

$$\Sigma_u = \left\{\sigma \in \mathbb{R};\ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| e^{-\sigma t}\,dt < \infty\right\}.$$

För sådana $s = \sigma + i\omega$ gäller:

$u(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

och $(\mathcal{L}u)(s) = \left(\mathcal{F}(u(t)e^{-\sigma t})\right)(\omega)$.



Om $u(t) = 0$ då $t < a$ (ngt $a \in \mathbb{R}$),

och $\hat{u}$:s def. mängd $\neq \emptyset$ så: $\sigma_u^+ = \infty$.

Sats $u \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$, $\sigma_u^- < \sigma_u^+ \Rightarrow \hat{u}$ analytisk i området $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+\}$.

B Se komp.

Sats Låt $u \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$ vara s.a. $\sigma_u^- < \sigma_u^+$.

a) $\sigma_u^- < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_u^+ \Rightarrow \hat{u}(s) \to 0$ då $s \to \infty$ och $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$.

b) $u(t) = 0$ då $t < 0$, $\sigma_1 > \sigma_u^- \Rightarrow \hat{u}(s) \to 0$ då $s \to \infty$ och $\operatorname{Re} s > \sigma_1$.

B Se komp.

Läs (om ni vill) om Eulers konstant i 10.6.

Räkneregler

Sats $u(t) + v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{u}(s) + \hat{v}(s)$, $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$

$\vdots$

$e^{ct} u(t)$	$\hat{u}(s-c)$, $\operatorname{Re}(s-c) \in \Sigma_u$	$(c \in \mathbb{C})$
$u'(t)$	$s\hat{u}(s)$, $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_{u'}$	
$t u(t)$	$-\hat{u}'(s)$, $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$	

B Se komp (och gör övning 10C).

Ex $u(t) = e^{3t}\chi(2-t)$. $\hat{u}(s) = ?$

$$\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \ \operatorname{Re} s > 0$$

$$\chi(-t) \qquad \frac{1}{-s}, \ \operatorname{Re}(-s) > 0$$

$$\chi(-(t-2)) \qquad e^{-2s}\frac{1}{-s}, \ \operatorname{Re} s < 0$$

$$e^{3t}\chi(2-t) \qquad e^{-2(s-3)}\frac{1}{-(s-3)}, \ \operatorname{Re}(s-3) < 0$$

Alltså: $\hat{u}(s) = -\dfrac{e^{-2(s-3)}}{s-3}$, $\operatorname{Re} s < 3$.

Ex Finn $u(t)$ s.a. $\hat{u}(s) = \dfrac{8}{s-1} - \dfrac{5}{s-2}$, $1 < \operatorname{Re} s < 2$.

$$e^{t}\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-1}, \ \operatorname{Re} s > 1.$$

Sök nu $v(t)$ s.a.

$$v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-2}, \ \operatorname{Re} s < 2$$

$$v(-t) \qquad \frac{1}{(-s)-2}, \ \operatorname{Re}(-s) < 2$$

$$-v(-t) \qquad \frac{1}{s+2}, \ \operatorname{Re} s > -2$$

I tabell:

$$e^{-2t}\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \ \operatorname{Re} s > -2,$$

så $-v(-t) = e^{-2t}\chi(t)$, dvs $v(t) = -e^{2t}\chi(-t)$.

Alltså: $u(t) = 8e^{t}\chi(t) + 5e^{2t}\chi(-t)$

Alt. beräkning av $v(t)$:

$$\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \ \operatorname{Re} s > 0$$

$$\chi(-t) \qquad \frac{1}{-s}, \ \operatorname{Re}(-s) > 0$$

$$-\chi(-t) \qquad \frac{1}{s}, \ \operatorname{Re} s < 0$$

$$-e^{2t}\chi(-t) \qquad \frac{1}{s-2}, \ \operatorname{Re}(s-2) < 0,$$

så $v(t) = -e^{2t}\chi(-t)$, som ovan.

Ex $\quad ? \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s+7}{s^2+2s+5}, \quad \operatorname{Re} s > -1.$

(Detta är en viktig del av exempel 10.10.)

$$\frac{s+7}{s^2+2s+5} = \frac{s+7}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{3\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}.$$

$$(\cos 2t)\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+2^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$e^{-t}(\cos 2t)\chi(t) \qquad \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}, \quad \operatorname{Re}(s+1) > 0$$

$$(\sin 2t)\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{s^2+2^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$e^{-t}(\sin 2t)\chi(t) \qquad \frac{2}{(s+1)^2+2^2}, \quad \operatorname{Re}(s+1) > 0$$

Alltså: $\quad e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t)\chi(t)$ har rätt transform.

Ex (10.11) Laplacetransformen av $\dfrac{\sin at}{t}\chi(t)$.

Läs själva i komp.

Faltning

Sats $u, v \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$, $\Sigma_u \cap \Sigma_v \neq \emptyset$, och om $\sigma \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$ så är minst en av $u(t)e^{-\sigma t}$ och $v(t)e^{-\sigma t}$ begränsad

$\Longrightarrow$ $u * v$ är en kont. fkn på $\mathbb{R}$, och

$$\widehat{u*v}(s) = \hat{u}(s)\hat{v}(s), \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_v.$$

B Se komp.

Ex Bestäm en lösning u till

$$\int_{-\infty}^{t} (\cos(t-r) - \sin(t-r))\, u(r)\, dr = t e^{2t} \chi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obs att VL är "$(\cos t - \sin t)\chi(t) * u(t)$".

Tabell + räkningar ger:

$$(\cos t - \sin t)\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

och

$$t e^{2t} \chi(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{(s-2)^2}, \quad \operatorname{Re} s < 2.$$

Om $u \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$ och $\Sigma_u \cap]0,2[\neq \emptyset$ ger $\widehat{VL}(s) = \widehat{HL}(s)$:

$$\frac{s-1}{s^2+1}\hat{u}(s) = -\frac{1}{(s-2)^2}, \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap]0,2[.$$

Så $\hat{u}(s) = -\dfrac{s^2+1}{(s-2)^2(s-1)} = \dfrac{-5}{(s-2)^2} + \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{-2}{s-1}$, $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u$.

$\hat{u}(s)$ är singulär i $s = 1, 2$ $\Rightarrow$ Σ_u är $]-\infty, 1[$, $]1,2[$ eller $]2,\infty[$, men $]2,\infty[$ ger <u>inte</u> en lösning (ty inget överlapp med $]0,2[$).

$\Sigma_u =]-\infty, 1[$ ger... $u(t) = (5t-1)e^{2t}\chi(-t) + 2e^{t}\chi(-t)$.

$\Sigma_u =]1, 2[$ ger... $u(t) = (5t-1)e^{2t}\chi(-t) - 2e^{t}\chi(t)$.

Inversionsformeln och entydighet

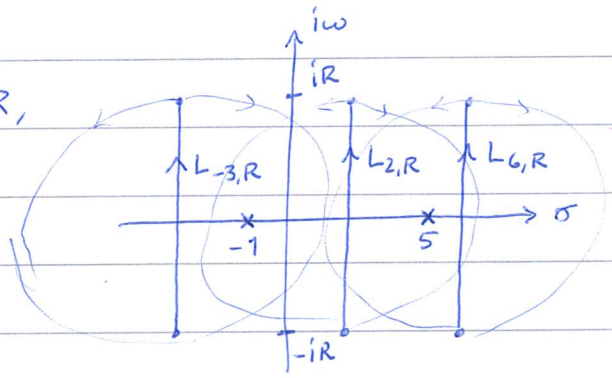
Sats $u \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$, $\sigma \in \Sigma_u$, u har generaliserad höger- och vänsterderivata i en punkt $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,R}} \hat{u}(s)e^{sa}\,ds = \frac{u(a+)+u(a-)}{2},$$

där $L_{\sigma,R}$ är sträckan $s=\sigma+i\omega$, $\omega: -R \to R$.

B Se komp.

Ex Inverstransformera $U(s) = \dfrac{6e^{-3s}}{(s+1)(s-5)}$ med def. mängd given av a) $\operatorname{Re} s < -1$, b) $-1 < \operatorname{Re} s < 5$, c) $\operatorname{Re} s > 5$.



Dvs: beräkna, för alla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,R}} U(s)e^{st}\,ds$$

då (t.ex.) $\sigma = -3, 2, 6$.

$$|U(s)e^{st}| = \frac{6e^{(t-3)\operatorname{Re} s}}{|s+1||s-5|},$$

så: $t \geq 3$: återvänd via halvcirkel åt vänster,

$t \leq 3$: ——— " ——— höger.

Residysatsen + uppskattningar ger nu:

a) $$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{-3,R}} U(s)e^{st}\,ds =$$

$$= \begin{cases} t \geq 3: \ 0, \\ t \leq 3: \ \left(-\operatorname{Res}_{s=-1} - \operatorname{Res}_{s=5}\right) U(s)e^{st} = e^{-(t-3)} - e^{5(t-3)}. \end{cases}$$

b) $\ldots \int_{L_{2,R}} \ldots = \begin{cases} t \geq 3: & \operatorname*{Res}_{s=-1} U(s)e^{st} = -e^{-(t-3)}, \\ t \leq 3: & -\operatorname*{Res}_{s=5} U(s)e^{st} = -e^{5(t-3)}. \end{cases}$

c) $\ldots \int_{L_{6,R}} \ldots = \begin{cases} t \geq 3: & (\operatorname*{Res}_{s=-1} + \operatorname*{Res}_{s=5}) U(s)e^{st} = -e^{-(t-3)} + e^{5(t-3)}, \\ t \leq 3: & 0. \end{cases}$

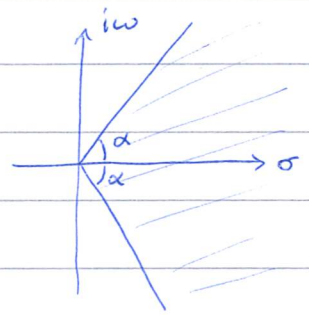
<u>Sats</u> (Entydighet) $u, v \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$. Om det finns ett $\sigma \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$ s.a. $\hat{u}(s) = \hat{v}(s)$ då $\operatorname{Re} s = \sigma$ så är $u(t) = v(t)$ i alla $t \in \mathbb{R}$ där både u och v är kont.

Start- och slutvärdessatserna

<u>Sats</u> $u \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$, $u(t) = 0$ då $t < 0$, $\Sigma_u \neq \emptyset$, och

$$\lim_{t \to 0+} u(t) = A \implies s\hat{u}(s) \longrightarrow A \text{ då } s \to \infty \text{ och } |\operatorname{Arg} s| < \alpha, \text{ där } 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

<u>B</u> Se komp.



Slutvärdessatsen: se komp.