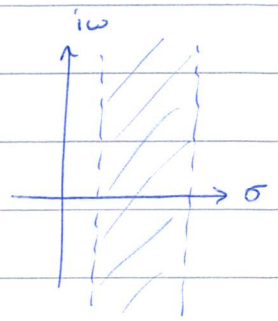
Fö 11

## Laplacetransform och distributioner




Har $\mathcal{L} : \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R}) \longrightarrow$ "{analytiska fkn def. i band}"

$\cap\!\!\mid$

$\mathcal{L} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow$ ? ...

## Analytiska distributioner

Rummet $\mathcal{H} = \{ \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,;\ \psi$ analytisk, $\omega \mapsto \psi(i\omega) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

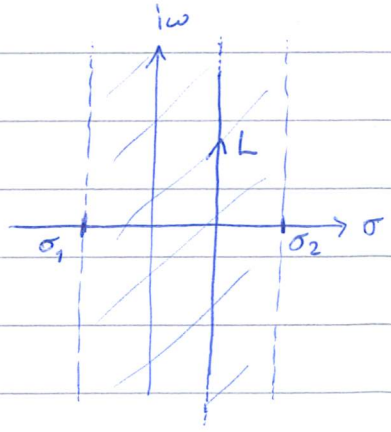
och $\hat{\psi}(t) \underset{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(i\omega) e^{-i\omega t} d\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \}$

"analytiska testfunktioner".

$\mathcal{H} \ni \psi \mapsto \hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är linjär och inverterbar (och kont.).

Rummet $\mathcal{H}' = \{ v : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \,;\ v$ linjär (och kont.)$\}$

"analytiska distributioner".




En analytisk fkn $v(s)$, $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$,
(som uppfyller ett tillväxtvillkor, se 11.5)
ger en analytisk distribution $v_{\mathcal{H}'}$ genom:

$$\langle v_{\mathcal{H}'}, \psi \rangle = \int_L v(s)\psi(s) \frac{ds}{i}, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Diracimpulsen som analytisk distribution:

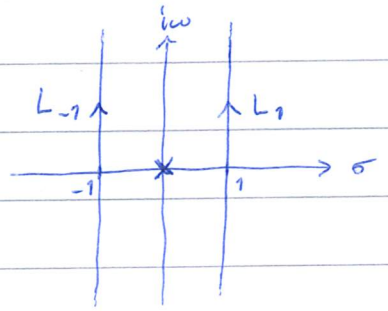
$$\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0), \quad \psi \in \mathcal{H},$$

och "i punkten $c$" $(c \in \mathbb{C})$: $\langle \delta_c, \psi \rangle = \psi(c)$, $\psi \in \mathcal{H}$.

**Ex** Låt $s_+^{-1} = \left(\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s > 0\right)_{\mathcal{H}'}$, $s_-^{-1} = \left(\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s < 0\right)_{\mathcal{H}'}$,

dvs $\langle s_+^{-1}, \psi \rangle = \int_{L_1} \frac{1}{s} \psi(s) \frac{ds}{i}$, $\psi \in \mathcal{H}$,

$\langle s_-^{-1}, \psi \rangle = \int_{L_{-1}} \frac{1}{s} \psi(s) \frac{ds}{i}$, $\psi \in \mathcal{H}$.




$s s_+^{-1} = 1$, ty om $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\langle s s_+^{-1}, \psi \rangle = \langle s_+^{-1}, s\psi \rangle = \int_{L_1} \frac{1}{s} s \psi(s) \frac{ds}{i} = \int_{L_1} \psi(s) \frac{ds}{i} = \langle 1, \psi \rangle.$$

P.s.s.: $s s_-^{-1} = 1$.

Genom residysatsen fås: $s_+^{-1} - s_-^{-1} = 2\pi\delta$, se 11.6.

**Sats** Låt $v \in \mathcal{H}'$. $v' = 0 \iff v = C$ för ngt $C \in \mathbb{C}$.

**Sats** (11.12) Låt $v \in \mathcal{H}'$,

$$(s-c_1)^{m_1} \dots (s-c_k)^{m_k} v = 0 \iff v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i - 1} C_{i,j} \delta_{c_i}^{(j)},$$

där $C_{i,j} \in \mathbb{C}$.

## Laplacetransform av distributioner

**Def** Låt $u \in D'(\mathbb{R})$. $u$:s laplacetransform, $\hat{u}$ eller $\mathcal{L}u$, tillhör $\mathcal{H}'$ och ges av $\langle \hat{u}, \psi \rangle = \langle u, \hat{\psi} \rangle$, $\psi \in \mathcal{H}$.

**Ex** $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1(s)$

**Ex** $1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2\pi\delta(s)$

(Visas på samma sätt som motsvarande exempel för fouriertransformen.)

**Sats(er)** $\mathcal{L} : D'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}'$ är linjär och inverterbar (och kont.). $\mathcal{L}$ på $D'(\mathbb{R})$ utvidgar $\mathcal{L}$ på $L^1_{lok}(\mathbb{R})$ och $\mathcal{F}$ på $S'$.

**B** Se komp.

**Def** Låt $u \in D'(\mathbb{R})$. $\Sigma_u = \{\sigma \in \mathbb{R} \,;\, u(t)e^{-\sigma t} \text{ är temperverad}\}$, och $\sigma_u^- = \inf \Sigma_u$, $\sigma_u^+ = \sup \Sigma_u$.

**Sats** Om $u \in D'(\mathbb{R})$ och $\sigma_u^- < \sigma_u^+$ så ges $\hat{u}$ av den analytiska funktionen "$\langle u(t), e^{-st} \rangle$", $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$.

Omvänt, om $U(s)$, $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$, är en analytisk funktion som uppfyller ett tillväxtvillkor, så finns $u \in D'(\mathbb{R})$ s.a. $\sigma_u^- \leq \sigma_1$, $\sigma_2 \leq \sigma_u^+$, och $U(s) =$ "$\langle u(t), e^{-st} \rangle$".

**B** Se komp.

## Räkneregler

**Sats** Räknereglerna för laplacetransformen (sats 10.7) gäller om $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**B** Se komp. (och gör övning 11E).

**Ex** $e^{ct} \xrightarrow{\mathcal{L}} ?$ $\quad (c \in \mathbb{C})$

Ur tabell: $\quad 1 \longrightarrow 2\pi\delta(s)$

$e^{ct}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{u}(s-c)$: $\quad e^{ct} \cdot 1 \quad 2\pi\delta(s-c)$

Alltså: $\widehat{e^{ct}} = 2\pi\delta_c$.

**Ex** Bestäm alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till $y''' - 3y' + 2y = 9\delta'$.

$\mathcal{L}: \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}'$ inverterbar, så:

$y''' - 3y' + 2y = 9\delta'$, $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \Leftrightarrow s^3\hat{y} - 3s\hat{y} + 2\hat{y} = 9s$, $\hat{y} \in \mathcal{H}'$.

Faktorisering ger $(s-1)^2(s+2)\hat{y} = 9s$, så en partikulärlösning för $\hat{y}$ är $\left(\frac{9s}{(s-1)^2(s+2)}, \operatorname{Re} s > 1\right)_{\mathcal{H}'}$.

Alltså: $\hat{y} = \left(\frac{9s}{(s-1)^2(s+2)}, \operatorname{Re} s > 1\right)_{\mathcal{H}'} + C\delta_1 + D\delta_1' + E\delta_{-2}$.

Inverstransform ger:

$$y = (2e^t + 3te^t - 2e^{-2t})\chi + \frac{C}{2\pi}e^t - \frac{D}{2\pi}te^t + \frac{E}{2\pi}e^{-2t}, \quad C, D, E \in \mathbb{C}.$$

## Faltning

**Sats** $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och minst en har kompakt stöd $\Rightarrow \widehat{u * v}(s) = \hat{u}(s)\hat{v}(s)$.

**LTI-system** $S$ med impulssvar $h$. $\hat{h}(s)$ kallas systemfunktion eller överföringsfunktion. $y = Sx = h * x$ ger $\hat{y}(s) = \hat{h}(s)\hat{x}(s)$.

## Enkelsidig laplacetransform

**Def** $u \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$, $u$:s enkelsidiga laplacetransform $\mathcal{L}_+ u$:

$$\mathcal{L}_+ u = \mathcal{L}(u\chi), \text{ dvs } (\mathcal{L}_+ u)(s) = \int_0^\infty u(t) e^{-st}\, dt, \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_{u\chi}.$$

$\mathcal{L}_+ u$ kan definieras för vissa $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, de som "har enkelsidig laplacetransform" (de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ s.a. det finns $\varepsilon > 0$ och $f \in \mathcal{L}^1(]-\varepsilon, 0[)$ s.a. $u = f$ på $]-\varepsilon, 0[$) genom $\mathcal{L}_+ u = \mathcal{L}(u_+)$, där $u_+$ "är $u\chi$" (se komp.).

**Sats** $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och $u'$ har enkelsidig lap.tr.

$\Rightarrow$ $u$ har enkelsidig lap.tr., $u(0-)$ existerar, och

$$\mathcal{L}_+(u')(s) = s(\mathcal{L}_+ u)(s) - u(0-).$$

**B** Se komp.

**Följd**

$$\mathcal{L}_+(u'')(s) = s^2(\mathcal{L}_+ u)(s) - u(0-)s - u'(0-),$$

$$\mathcal{L}_+(u''')(s) = s^3(\mathcal{L}_+ u)(s) - u(0-)s^2 - u'(0-)s - u''(0-),$$

$$\dots$$

**Sats** ("Enkelsidig faltning") $u, v \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_+\left(\int_0^t u(t-r)v(r)\,dr\right)(s) = (\mathcal{L}_+ u)(s)(\mathcal{L}_+ v)(s),$$

$$\operatorname{Re} s \in \Sigma_{u\chi} \cap \Sigma_{v\chi}.$$

**B** Se komp.

## Begynnelsevärdesproblem

Ex $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 2e^t, & t \geq 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$

Betyder att $(y''-4y'+3y)_+ = (2e^t)_+$.

Enkelsidig laplacetransform ger ($Y = \mathcal{L}_+ y$):

$\mathcal{L}_+$ av $2e^t$, dvs $\mathcal{L}$ av $2e^t \chi(t)$.

$$s^2 Y(s) - 1s - 4 - 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = \frac{2}{s-1},$$

Def. mängd? Onödig att ange här, ännu "okänd". Räcker att veta: halvplan åt höger.

$$(s^2 - 4s + 3)Y(s) = \frac{2}{s-1} + s = \frac{s^2 - s + 2}{s-1},$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{(s-3)(s-1)^2} =$$

$+ C\delta_1(s) + D\delta_3(s)$? I princip ja, men nej: konstanterna blir alltid 0 i denna typ av problem.

$$= \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{-1}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s > 3.$$

Nu är det dags att ange definitionsmängd.

Inverstransform m.h.a. tabell ger:

$$y(t) = 2e^{3t} - te^t - e^t, \quad t \geq 0.$$

$t \geq 0$, så $\chi(t)$ behöver inte skrivas ut.

Kontroll: $y(0) = 2 - 0 - 1 = 1$ ok!

$y'(t) = 6e^{3t} - te^t - 2e^t$, $\quad y'(0) = 6 - 0 - 2 = 4$ ok!

$y''(t) = 18e^{3t} - te^t - 3e^t$,

$y'' - 4y' + 3y = (18 - 24 + 6)e^{3t} + (-1 + 4 - 3)te^t + (-3 + 8 - 3)e^t =$

$= 2e^t$ ok!

Exempel 11.35, 11.36 och 11.37: Läs själva.