Fö 12

Z-transformen

Def Låt $u: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. u:s z-transform, $\hat{u}$ eller $\mathcal{Z}u$:

$$\hat{u}(z) = (\mathcal{Z}u)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n},$$

definierad för $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s.a. serien är absolutkonvergent.

Ex $u(n) = 2^n \chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, ger ($|2/z| < 1$, geometrisk serie.)

$$\hat{u}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \frac{1}{1-2/z} = \frac{z}{z-2}, \quad |z| > 2.$$

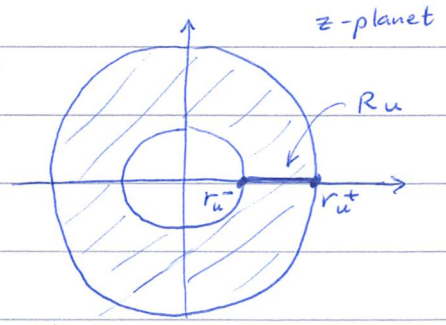
$v(n) = -2^n \chi(-n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, ger

$$\hat{v}(z) = /\text{på samma sätt}/ = \frac{z}{z-2}, \quad 0 < |z| < 2.$$

Definitionsmängden för $\hat{u}$ ges av $|z| \in R_u$, där

$$R_u = \left\{ 0 < r < \infty ; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| r^{-n} < \infty \right\}.$$

$r_u^- = \inf R_u$, $r_u^+ = \sup R_u$.



Sats $u: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ s.a. $r_u^- < r_u^+$

$\Longrightarrow$ $\hat{u}$ är en analytisk fkn i $\{z \in \mathbb{C} ; r_u^- < |z| < r_u^+\}$.

Omvänt: om $U(z)$, $r_1 < |z| < r_2$, är en analytisk fkn så finns en entydigt bestämd $u: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ s.a. $\hat{u}(z) = U(z)$ då $r_1 < |z| < r_2$.

B Se kurs i komplex analys.

Ex Diskreta diracimpulsen: $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\hat{\delta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 z^{-0} = 1, \quad z \neq 0.$$

Se komp. för $\chi(n)$, $\binom{n+k}{m}\chi(n)$, $(\cos n\alpha)\chi(n)$, och $\begin{cases} 1/n, & n>0, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$

Räkneregler

Sats

$$\begin{array}{lcll} u(n)+v(n) & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & \hat{u}(z)+\hat{v}(z), & |z| \in R_u \cap R_v \\ \vdots & & \vdots & \\ u(n-m) & & z^{-m}\hat{u}(z), & |z| \in R_u \\ \vdots & & \vdots & \\ nu(n) & & -z\hat{u}'(z), & r_u^- < |z| < r_u^+ \end{array}$$

B Se komp. (och gör övning 12C).

Ex Bestäm en lösning y till $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 2\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\hat{VL}(z) = \hat{HL}(z)$ ger: $z^2\hat{y}(z) - 5z\hat{y}(z) + 6\hat{y}(z) = \frac{2z}{z-1}$, $|z| \in R_y \cap]1,\infty[$.

$(|z|>1)$

$$\hat{y}(z) = \frac{2z}{(z^2-5z+6)(z-1)} = z\,\frac{2}{(z-3)(z-2)(z-1)} =$$

$$= z\left(\frac{1}{z-3} + \frac{-2}{z-2} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z-3} - \frac{2z}{z-2} + \frac{z}{z-1},$$

med definitionsmängd given av $|z|>3$ eller $2<|z|<3$ eller $1<|z|<2$, men $0<|z|<1$ ger inte en lösning.

T.ex. $2<|z|<3$ ger...: $y(n) = -3^n\chi(-n-1) + (-2\cdot 2^n + 1)\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Faltning

Def Låt $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Deras faltning:

$$(u*v)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)v(k), \quad n \in \mathbb{Z} \text{ s.a. serien är absolutkonvergent.}$$

Sats $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $R_u \cap R_v \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ $u*v$ definierad på hela $\mathbb{Z}$, och

$$\widehat{u*v}(z) = \hat{u}(z)\hat{v}(z), \quad |z| \in R_u \cap R_v.$$

B Se komp.

Ex Bestäm en lösning u till

$$u(n) + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(n-k)\cdot 2^k}_{= (u*f)(n), \text{ där } f(n) = 2^n \chi(n).} = 4\cdot 3^n \chi(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$\widehat{VL}(z) = \widehat{HL}(z)$: $\quad \hat{u}(z) + \hat{u}(z)\underbrace{\frac{z}{z-2}}_{(|z|>2)} = \underbrace{\frac{12}{3-z}}_{(|z|<3)}, \quad |z| \in R_u \cap]2,3[.$

Så $\hat{u}(z) = \ldots = \dfrac{6(z-2)}{(3-z)(z-1)} = \dfrac{3}{3-z} + \dfrac{-3}{z-1} = \dfrac{3}{3-z} - \dfrac{3}{z}\dfrac{z}{z-1},$

med def.m. given av $1<|z|<3$ ($0<|z|<1$ och $|z|>3$ ger inte lösningar). Inverstransform ger...:

$$u(n) = 3^n \chi(-n) - 3\chi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Inversionsformeln

Sats $u: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $r \in R_u$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \hat{u}(z) z^{n-1}\, dz = u(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

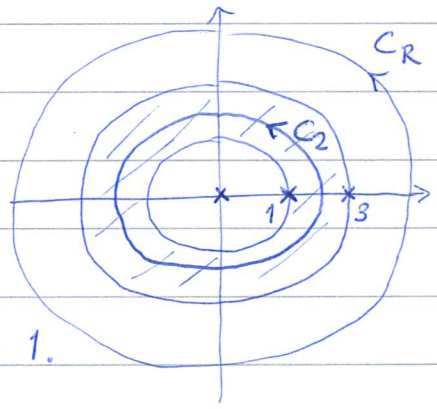
där C_r är cirkeln $z = re^{i\theta}$, $\theta: 0 \to 2\pi$.

B Se komp.

Ex Bestäm $u(n)$ s.a. $\hat{u}(z) = \dfrac{z^2-3}{(z-1)(z-3)}$, $1 < |z| < 3$.

Enligt inversionsformeln:

$$u(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{z^2-3}{(z-1)(z-3)} z^{n-1}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



$n \geq 1$: $\quad u(n) = \operatorname*{Res}_{z=1} \dfrac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)} = \dfrac{(1^2-3)\cdot 1^{n-1}}{1\cdot(1-3)} = 1.$

$n = 0$: $\quad u(0) = \left(\operatorname*{Res}_{z=1} + \operatorname*{Res}_{z=0}\right) \dfrac{z^2-3}{(z-1)(z-3)z} = 1 + (-1) = 0.$

$R > 3$ ger $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2 - C_R} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)}\, dz = -\operatorname*{Res}_{z=3} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)} = -3^n, \quad n \in \mathbb{Z},$

och $\displaystyle\left|\int_{C_R} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)}\, dz\right| \leq \frac{(R^2+3)R^{n-1}}{(R-1)(R-3)} \cdot 2\pi R \longrightarrow 0$ då $R \to \infty$

omm $n \leq -1$, så: $\quad u(n) = -3^n, \quad n \leq -1.$

Enkelsidig z-transform

Def Låt $u: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. u:s enkelsidiga z-transform $\mathcal{Z}_+ u$:

$$(\mathcal{Z}_+ u)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n}, \quad |z| \in R_{u\chi}.$$

Obs. att definitionsmängden för $\mathcal{Z}_+ u$ ges av $|z| > r$ (eller $|z| \geq r$) för något $0 < r < \infty$ (om den inte är tom eller lika med $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Sats
$$\mathcal{Z}_+(u(n+1))(z) = z(\mathcal{Z}_+ u)(z) - u(0)z,$$
$$\mathcal{Z}_+(u(n+2))(z) = z^2(\mathcal{Z}_+ u)(z) - u(0)z^2 - u(1)z,$$
$$\vdots$$

B Övning 12C.

Ex Lös $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$,
med begynnelsevillkor $y(0) = 0, \; y(1) = 1$.

Enkelsidig z-transform ger ($Y = \mathcal{Z}_+ y$):

($\mathcal{Z}_+$ av 1, dvs $\mathcal{Z}$ av $\chi(n)$)

$$z^2 Y(z) - 0z^2 - 1z - 3(zY(z) - 0z) + 2Y(z) = \frac{z}{z-1},$$

$$Y(z) = \ldots = z\,\frac{z}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1}, \quad |z| > 2.$$

Inverstransform med tabell ger: $2 \cdot 2^n \chi(n) - n\chi(n) - 2\chi(n)$,

så: $y(n) = 2^{n+1} - n - 2, \quad n \geq 0.$

Se exempel 12.21 för hantering av uttryck av typen $\frac{z^2+2z}{z^2-2z+4}$.

<u>Sats</u> ("Enkelsidig faltning") $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_+\left(\sum_{k=0}^{n} u(n-k)v(k)\right)(z) = (\mathcal{Z}_+u)(z)(\mathcal{Z}_+v)(z), \quad |z| \in R_{u\chi} \cap R_{v\chi}.$$

<u>B</u> Följer av den tidigare satsen om faltning (sats 12.14).

<u>Ex</u> Beräkna $s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + \ldots + n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Med $u(n) = 1$ och $v(n) = n^2$ har vi $s(n) = \sum_{k=0}^{n} u(n-k)v(k)$,

så satsen ger:

$$(\mathcal{Z}_+ s)(z) = (\mathcal{Z}_+u)(z)(\mathcal{Z}_+v)z = (1\cdot\chi(n))^\wedge(z)\cdot(n^2\chi(n))^\wedge(z) =$$

$$= \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}, \quad |z| > 1.$$

Tabellraden $\binom{n+k}{m} c^n \chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{c^{m-k} z^{k+1}}{(z-c)^{m+1}}$, $|z| > |c|$ $(c \in \mathbb{C})$

ger nu:

$$s(n) = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$