1A Här handlar det om att för en given distr. u och en testfkn φ säga vad verkan av u på φ, dvs $\langle u, \varphi \rangle$, blir. (Se 1.15)

stegfunktionen, se 1.18

T.ex. om $u = t^2(\chi(t-1) - \chi(t-2)) + 6\delta_5$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

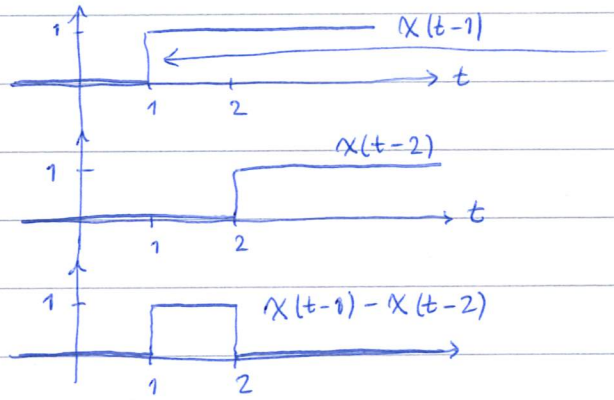
$$\langle u, \varphi \rangle = \langle t^2(\chi(t-1) - \chi(t-2)) + 6\delta_5, \varphi \rangle =$$

/ def. av "+" för distributioner, se 1.15 /

$$= \langle t^2(\chi(t-1) - \chi(t-2)), \varphi \rangle + \langle 6\delta_5, \varphi \rangle =$$

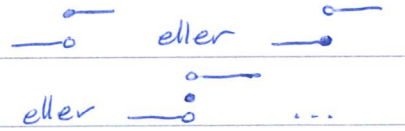
/ funktion som distr., se 1.17, och diracimpuls, se 1.22 /

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2(\chi(t-1) - \chi(t-2))\varphi(t)\,dt + 6\varphi(5) =$$



egentligen:  ,

men för en integral gör det ingen skillnad med



$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \begin{Bmatrix} 0, & t<1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{Bmatrix} \cdot \varphi(t)\,dt + 6\varphi(5)$$

$$= \int_{-\infty}^{1} t^2 \cdot 0\,\varphi(t)\,dt + \int_{1}^{2} t^2 \cdot 1\,\varphi(t)\,dt + \int_{2}^{\infty} t^2 \cdot 0\,\varphi(t)\,dt + 6\varphi(5)$$

$$= \int_{1}^{2} t^2 \varphi(t)\,dt + 6\varphi(5).$$

1B Här handlar det om att känna igen en distribution givet dess verkan (ungefär 1A baklänges).

T.ex.: Vad är $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ om

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{2} t^3 \varphi'(t)\,dt + \varphi(2) \quad \text{för } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})?$$

$\langle u, \varphi \rangle =$ / partiell integration, och diracimpuls, se 1.22 /

$$= \Big[t^3 \varphi(t) \Big]_{-\infty}^{2} - \int_{-\infty}^{2} 3t^2 \varphi(t)\,dt + \langle \delta_2, \varphi \rangle =$$

/ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dvs φ är en testfkn på $\mathbb{R}$, så det finns $a, b \in \mathbb{R}$ s.a. $a < b$ (och $-\infty < a$, $b < \infty$) och s.a. $\varphi(t) = 0$ då $t < a$, eller $t > b$ /

$$= 8\varphi(2) - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} 3t^2 \cdot \begin{Bmatrix} 1, & t \le 2 \\ 0, & t > 2 \end{Bmatrix} \varphi(t)\,dt + \langle \delta_2, \varphi \rangle$$

$$= 8\langle \delta_2, \varphi \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} 3t^2 \chi(2-t) \varphi(t)\,dt + \langle \delta_2, \varphi \rangle$$

$$= \langle 9\delta_2 - 3t^2 \chi(2-t), \varphi \rangle \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

så: $\underline{\underline{u = 9\delta_2 - 3t^2 \chi(2-t)}}$.

(I stället för $\chi(2-t)$ kunde man tagit $1 - \chi(t-2)$. Funktionsvärdet i $t = 2$ skiljer sig då åt, men det ger upphov till samma distribution.)

1C Se 1.17. Det handlar alltså om att avgöra om u tillhör $L^1_{lok}(I)$ (väsentligen), eller inte, dvs om u är lokalt integrerbar på intervallet I. För detta, se 1.4 och 1.5.

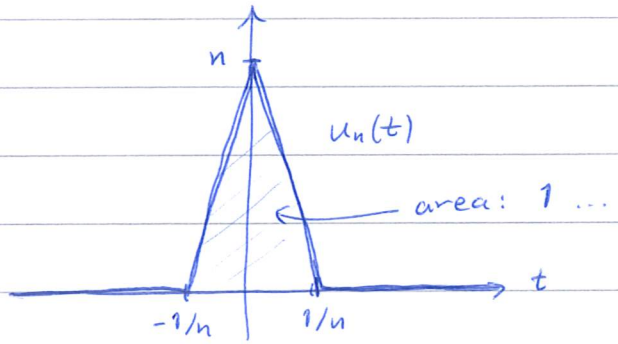
Obs att det inte spelar någon roll om u inte är definierad i enstaka punkter i I. (Det är detta som "väsentligen" handlar om, se 1.3.)

Obs att om K är ett kompakt delintervall av $\mathbb{R}$ så finns $-\infty < a < b < \infty$ s.a. $K = [a, b]$.
Om i stället K är ett kompakt delintervall av $]0, \infty[$ så finns $\underline{0 < a} < b < \infty$ s.a. $K = [a, b]$.
Se A.5.

1D Man bestämmer gränsvärdet av u_n i $D'(\mathbb{R})$ (dvs i distributionsmening) genom att bestämma gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle$ för en godtycklig testfkn $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Se 1.26.

Hur ser u_n ut? $u_n(t) = n - n^2 t$ då $0 \le t \le 1/n$, så $u_n(0) = n$, $u_n(1/n) = 0$ ... och p.s.s. för $t \le 0$...

Så:



Exempel 1.27 är en god guide för räkningarna.

*1E Obs att i definitionen $\langle u, \varphi \rangle = -\int_0^\infty (\ln t)\varphi'(t)\,dt$ så tillhör φ $D(\underline{\underline{\mathbb{R}}})$, så φ behöver inte vara 0 för $t \leq 0$.

a) Tänk på att om $\varphi \in D(\mathbb{R})$ har stöd i $]0, \infty[$ så finns $0 < a < b < \infty$ s.a. $\varphi(t) = 0$ då $t < a$ eller $t > b$.

*1F Som 1D, men man behöver maclaurinutveckla ett steg längre.

*1G Att $u_n \to 0$ i $D'(\mathbb{R})$ betyder att $\langle u_n, \varphi \rangle \to \langle 0, \varphi \rangle$ för alla $\varphi \in D(\mathbb{R})$ (och $\langle 0, \varphi \rangle = 0$), så visa att $\langle u_n, \varphi \rangle \to 0$ för en godtycklig $\varphi \in D(\mathbb{R})$.
Tips: partiell integration.

*1H Visa först att f_1 är deriverbar överallt (använd differenskvot för $t = 0$). Vad blir f_1'?
Kan resonemanget upprepas med f_1' för att få f_1''?
Osv?