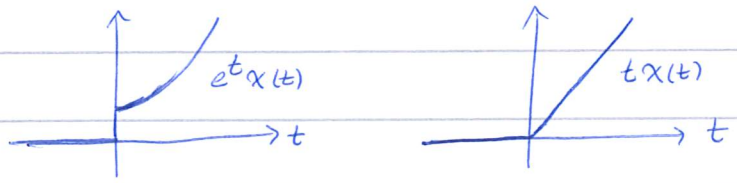
3A Studera första exemplet i anteckningarna för FÖ3.

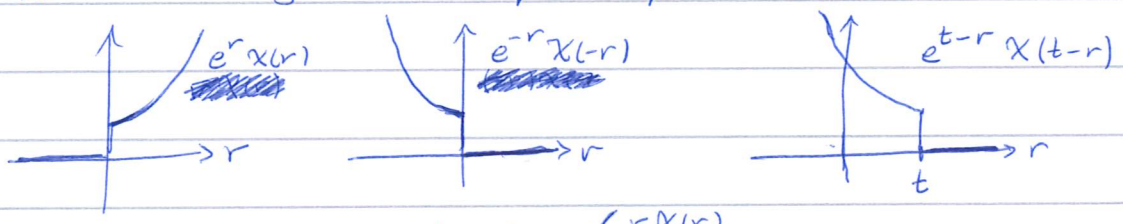
a) Rita upp funktionerna lite schematiskt:



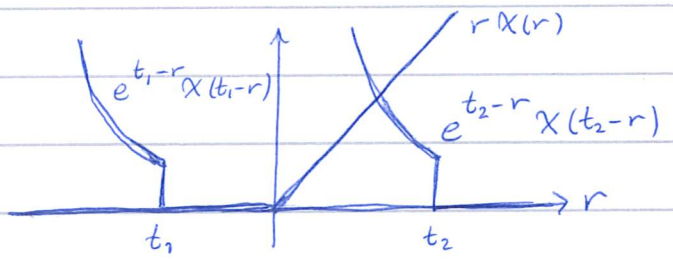
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-r}\chi(t-r)\cdot r\chi(r)\,dr$$ ska alltså beräknas

för alla värden på t $(t \in \mathbb{R})$.

Lägg in $r\chi(r)$ på r-axeln och rita sen in hur $e^{t-r}\chi(t-r)$ hamnar på r-axeln för lite olika värden på t. Tänk på att $e^{t-r}\chi(t-r)$ är "$e^r\chi(r)$ spegelvänd kring $r=0$ och sen flyttad så att origo hamnar på t på r-axeln":



Alltså:



Dela upp integralberäkningen i olika fall beroende på hur kurvorna hamnar för olika t...
Sen är det bara att räkna!

b) Samma metod.

3B Alla lösningar $y \in D'(\mathbb{R})$ till $y'' + 4y = \delta' - 2\delta$ fås som $y_p + y_h$, där y_p är en partikulärlösning och y_h är alla homogenlösningar.

y_h (dvs alla lösningar till $y'' + 4y = 0$) fås från sats 2.16, men reell form på dessa är nog att föredra i detta fall.

y_p fås via sats 3.20 (jämför med exempel 3.21).
Vi har $L = D^2 + 4$, alltså $m = 2$, så y_f ska uppfylla 2 beg.villk.: $y_f(0) = 0$ och $y_f'(0) = 1^{-1} = 1$

Koeff. för D^m i L.

Kontrollräkna gärna (mycket gärna!) ditt $f(t) = y_f(t)\chi(t)$ så att $Lf = \delta$ verkligen gäller.
(Dvs: räkna ut $f' = \ldots$ och $f'' = \ldots$ och kolla att $f'' + 4f = \delta$.)

Matcha sedan högerledet $\delta' - 2\delta$ för att få y_p.

3C. Resultatet i denna uppgift visar att u "regulariseras" genom faltningen med ρ (även om inte $\rho \in C^\infty$).

Beräkningsmetod som i 3A, men jag föredrar att beräkna $u*\rho$ som

$$(u*\rho)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r)\rho(t-r)\,dr$$

i detta fall. (Det blir ju samma sak eftersom $u*\rho = \rho*u$.)

3D a) Som exempel 3.21.

b) Man bör få fram något i stil med att
$Ce^{t} + De^{-t} = 0$ för alla $t < 0$.
Betyder det att $C = D = 0$? Ja, t.ex. kan man
derivera och få att $Ce^{t} - De^{-t} = 0$ för $t < 0$,
så $2Ce^{t} = 0$ för $t < 0$, osv.

c) Att h är begränsad betyder att det finns
en konstant $C \geq 0$ s.a. $|h(t)| \leq C$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

def av $*$.

3E a) $(\delta_a * \varphi)(t) = \ldots$

b) Man kan ha nytta av att $(u * \varphi)(0) = \langle u, \check{\varphi} \rangle$.

*3F Bestäm först alla impulssvar, som i exempel 3.21.

Räkningarna förenklas mycket om man kommer ihåg att förenkla t.ex. $te^t\delta$ till $0e^0\delta = 0$!

*3G Börja t.ex. så här: $(u*\varphi)'(t) \underset{\text{sats 3.13.}}{=} (u*\varphi')(t) \overset{\text{def av } *}{=} \ldots$

*3H Om $t \leq 0$ så $(t_+^a * t_+^b)(t) = \ldots$.

Om $t > 0$ så $(t_+^a * t_+^b)(t) = \int_0^t (t-r)^a r^b \, dr = \ldots$

Överväg ett variabelbyte....