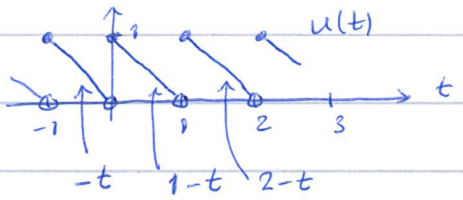
4A Bara att räkna på...

När man vill dela med $m-n$ uppstår specialfallet $m-n=0$, dvs $m=n$.

4B Räkna ut $\hat{u}(n)$ för $n \in \mathbb{Z}$ mha definitionen, se 4.8.
Skriv sen upp fourierserien, se 4.8.

a) Obs att $u(t)$ ges av "olika formler på olika intervall":



Bekvämast är nog att integrera över [-1,0], där $u(t)$ är direkt given i uppgiften, men t.ex. [0,1] går lika bra, bara man då har $u(t) = 1 - t$.

När man vill dela med n uppstår specialfallet $n = 0$.

b) När man vill dela med $1-n$ och $1+n$ uppstår specialfallen $n = 1$ och $n = -1$. (Skriv helst först om $\sin t$ mha Eulers formler.)

4C Följ mönstret i bevisen av sats 4.10.

"Paritetsbevarande": Visa alltså dels att om $u(-t) = u(t)$ så är $\hat{u}(-n) = \hat{u}(n)$, dels att om $u(-t) = -u(t)$ så är $\hat{u}(-n) = -\hat{u}(n)$.

4D Grundstrategi: bestäm $\hat{y}(n)$ genom ekvationen $\widehat{VL}(n) = \widehat{HL}(n)$ och låt $y(t) =$ y:s fourierserie.
(Som i exempel 4.11.)

$\widehat{VL}(n)$: använd räkneregelerna.

$\widehat{HL}(n)$: Man skulle kunna beräkna: $(T = 2, \Omega = \frac{2\pi}{T} = \pi)$

$$\widehat{HL}(n) = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos^2 \pi t \cdot e^{-in\pi t}\, dt = \ldots$$

men det är onödigt arbetsamt. Skriv istället om $\cos^2 \pi t$ med Eulers formler:

$$\cos^2 \pi t = \ldots = \frac{1}{4}e^{i2\pi t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-i2\pi t}$$

och jämför med en allmän 2-periodisk trig. serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t} =$$

$$= \ldots + c_{-3}e^{-i3\pi t} + c_{-2}e^{-i2\pi t} + c_{-1}e^{-i\pi t} + $$
$$+ c_0 + c_1 e^{i\pi t} + c_2 e^{i2\pi t} + c_3 e^{i3\pi t} + \ldots$$

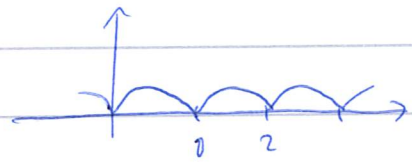
så ser man att $\widehat{HL}(n) = \begin{cases} 1/4, & n = \pm 2 \\ 1/2, & n = 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

4E När man ska bestämma u:s f.s. på reell form kan man antingen beräkna $\hat{u}(n)$ med definitionen och sen a_n och b_n mha $\hat{u}(n)$ (se 4.8), eller beräkna a_n och b_n direkt som integraler (se 4.8).
Jag föredrar $\hat{u}(n)$, för då blir det bara en integralberäkning.

(Sats 4.16)

a) Här handlar det om satsen om punktvis konvergens, dvs: är förutsättningarna uppfyllda så att man kan dra slutsatsen att u är lika med sin fourierserie?

Skissa u:

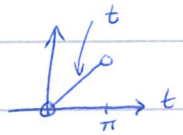


Har u gen. hö- och vä-deriv i varje punkt (se fig)?
Är u kont.?

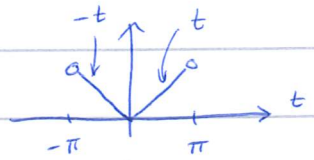
b) Lös ut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ur den likhet man får från a) med $t=0$.

c) Försök hitta ett t så att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ dyker upp i likheten i a) ....

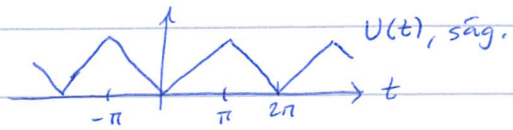
4F a) u :



u utvidgad till en jämn fkn :



Sen utvidgad till 2π-per. fkn :



För att beräkna $\hat{U}(n)$ behöver man bara använda $U(t)$ för $0 \le t < \pi$, dvs där $U(t) = u(t)$:

$$\hat{U}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(t)e^{-int}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(t)(\cos nt - i\sin nt)\,dt =$$

$U(t)$ är en <u>jämn</u> fkn, så $U(t)\cos nt$ är jämn, och $U(t)\sin nt$ är udda.

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt \quad \text{om } f \text{ är jämn,}$$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \quad \text{om } f \text{ är udda}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} U(t)\cos nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos nt\,dt = \ldots .$$

b) Samma metod ...

*4G $\sin t = \ldots$ (Eulers formler), och räkneregler för fourierkoeff. ....

*4H Betrakta derivatan u'. Vad blir u':s fourierkoeff. och vad kan sägas om dessa?