6A Medelvärdet av en periodisk distr. definieras i 6.3. Om vi t.ex. vill beräkna medelvärdet av den π-periodiska distributionen

$$4\sin^2 t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{n\pi} - 2\delta_{n\pi+1}) :$$

Låt $T = \pi$.

$$\fint_T \left(4\sin^2 t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{n\pi} - 2\delta_{n\pi+1})\right) dt =$$

$$= \fint_T 4\sin^2 t \, dt + \fint_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{n\pi} - 2\delta_{n\pi+1}) \, dt =$$

(etta över en per.)

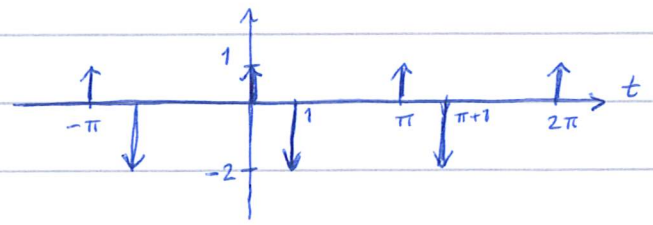
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\sin^2 t \, dt + \frac{1}{\pi}\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{n\pi} - 2\delta_{n\pi+1}), \rho \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\rho(n\pi) - 2\rho(n\pi+1)) =$$

/ För en etta över en π-period gäller $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(t+n\pi) = 1$, för alla $t \in \mathbb{R}$ (se 6.3). Vi använder det med $t=0$ och $t=1$ /

$$= 2 + \frac{1}{\pi}(1 - 2\cdot 1) = \underline{\underline{2 - \frac{1}{\pi}}}.$$

En bild av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{\pi n} - 2\delta_{n\pi+1})$:



6B a) Skissa u, så blir det lätt att derivera mha sats 2.5, dvs u' = punktvis derivata + "diracer som fyller upp sprången".

b) Från a): $u' = -1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$.

Så $\widehat{u'}(n) = \widehat{-1}(n) + \widehat{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n}(n) = \ldots$

Använd exempel 6.6.

c) ...

6C Följ mönstret i beviset till sats 6.10.

6D Bestäm först $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ mha metoden i

exempel 6.12. Obs att man för att matcha nämnaren behöver använda u''. $\left(u = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{int}\right)$
Man får sedan två obestämda konstanter i u, men båda kan bestämmas från att $u(t) = u(t-2\pi)$ (för $0 < t < 2\pi$), eftersom funktionerna e^t och e^{-t} är linjärt oberoende.

Använd sedan resultatet för $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ för att bestämma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

*6E Obs att u udda $\Rightarrow$ $\hat{u}$ udda. Vad ger det för $\hat{u}(0)$?

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ ... ger en ekvation för $\hat{u}$ ... .

Pröva lite olika n i den ... .

(dvs: $((\sin t)u)\hat{}(n)$ [redacted]
$= (1(t))\hat{}(n)$, och förenkla ...)

*6F $u = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{int}$. Härled en ekvation för u som i

exempel 6.12. [redacted] Lös den.... Konstantbestämning: använd periodicitet hos u, och någon ytterligare egenskap hos u som syns tydligt i formen $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{int}$ ... .