11A Detta liknar ju t.ex. övning 10D (och exempel 10.15), men obs. att gränsvärdet

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,R}} \frac{s^3+3s^2}{s^2-1} e^{st}\, ds$$

inte existerar. (Integralerna längs de cirkelbågar man vill återvända längs går inte mot 0...)

Det som behövs här är en polynomdivision:

$$\frac{s^3+3s^2}{s^2-1} = p(s) + \frac{r(s)}{s^2-1}$$, där p och r är polynom.

$p(s)$ inverstransformerar man med tabell + räkneregler, och på resten kan man använda inversionsformeln:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,R}} \frac{r(s)}{s^2-1} e^{st}\, ds = \dots,$$

med $\sigma = -2, 0, 2$, t.ex.

(Uppskattningarna längs cirkelbågarna kräver Jordans lemma, men det är ok i denna kurs att bara säga "residysatsen + uppskattningar ger ..." (när det är sant!).)

(Om man inte noterar att första integralen ovan är divergent utan bara räknar på (med odefinierade uttryck...) så får man "rätt svar förutom att $\delta' + 3\delta$ saknas". Det beror på att $p(s)$ är analytisk överallt och alltså inte bidrar något till residyerna.)

11B Exempel med en liknande ekvation:

$$y'(t) - y(t) = \delta_3(t) + \chi(t) + 4e^{-t}\chi(-t).$$

(tabell + räkneregler)

$\widehat{VL}(s) = \widehat{HL}(s)$ ger ... :

$$(s-1)\hat{y}(s) = e^{-3s} + \left(\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s > 0\right)_{\mathcal{H}'} + \left(\frac{-4}{s+1}, \operatorname{Re} s < -1\right)_{\mathcal{H}'}$$

(Det är inget problem att definitionsmängderna inte överlappar.)

$$\hat{y}(s) = \left(\frac{e^{-3s}}{s-1}, \operatorname{Re} s > 1\right)_{\mathcal{H}'} + \left(\frac{1}{(s-1)s}, \operatorname{Re} s > 1\right)_{\mathcal{H}'} + \left(\frac{-4}{(s-1)(s+1)}, \operatorname{Re} s < -1\right)_{\mathcal{H}'} + 2\pi C\delta_1(s)$$

(Kunde valt Re s < 1) (Kunde valt 0 < Re s < 1) (Inget val, varken −1 < Re s < 1 eller Re s > 1 överlappar med Re s < −1) (Bara för att slippa 2π i svaret)

Inverstransform ger (varje del för sig) ... :

(PBU, tabell + räkneregler)

$$y(t) = e^{t-3}\chi(t-3) + (e^t - 1)\chi(t) + 2(e^t - e^{-t})\chi(-t) + Ce^t.$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(e^{t-3}\chi(t-3) + e^{t-3}\delta_3(t)\right) + \left(e^t\chi(t) + (e^t-1)\delta(t)\right) + \\ &\quad + \left(2(e^t+e^{-t})\chi(-t) + 2(e^t - e^{-t})(-\delta(t))\right) + Ce^t = \\ &= e^{t-3}\chi(t-3) + \delta_3(t) + e^t\chi(t) + 2(e^t+e^{-t})\chi(-t) + Ce^t, \end{aligned}$$

så $y'(t) - y(t) = \delta_3(t) + \chi(t) + 4e^{-t}\chi(-t)$ ok!

11C Dessa beg.värdesproblem är av standardtyp.
Studera exemplet i föreläsningsanteckningarna och följ gärna den räknemetoden.

För (c) kan exempel 11.36 vara nyttigt att hitta på.

11D Använd enkelsidig laplacetransform och sats 11.34.

11E Följ mönstret i beviset av sats 11.25.

11F Som förut gäller för LTI-systemet S att $h = S\delta$, vilket ger ekvationen $2h' + h = \delta' + \delta$ för h. Laplacetransformera (inte enkelsidigt) och bestäm $\hat{h}$. Inverstransform ger sen h.

*11G Ledning i facit

*11H För $s\underline{s}^{-1} = 1$ se t.ex. föreläsningsanteckningarna.

För $\underline{s}^{-1}$ udda, börja t.ex. med att visa att

(spegling)

$$\langle s_+^{-1}, \psi \rangle = \ldots \text{ lite integraler i s-planet} \ldots = -\langle s_-^{-1}, \psi \rangle,$$

$\psi \in \mathcal{H}$.