Lösningar, TATA77, 2021-08-26

1. $y(n+2)+y(n+1)-2y(n)=3, \quad n\in\mathbb{N}, \quad y(0)=6, \quad y(1)=4.$

Enkelsidig z-transform ger ($Y=\mathcal{Z}_+y$):

$$z^2Y(z)-6z^2-4z+zY(z)-6z-2Y(z)=\frac{3z}{z-1},$$

$$(z^2+z-2)Y(z)=6z^2+10z+\frac{3z}{z-1}=\frac{6z^3+4z^2-7z}{z-1},$$

$$Y(z)=z\,\frac{6z^2+4z-7}{(z+2)(z-1)^2}=z\left(\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{5}{z-1}\right), \quad |z|>2.$$

Tabell och räkneregler ger nu:

Svar: $y(n)=(-2)^n+n+5, \quad n\in\mathbb{N}.$

2. $y''-2y'-3y=\delta''.$ Laplacetransform ger:

$s^2\hat{y}(s)-2s\hat{y}(s)-3\hat{y}(s)=s^2, \quad (s-3)(s+1)\hat{y}(s)=s^2,$ så

$$\hat{y}(s)=\left(\frac{s^2}{(s-3)(s+1)}, \ \operatorname{Re} s>3\right)_{\mathcal{H}'}+A\delta_3(s)+B\delta_{-1}(s), \quad A,B\in\mathbb{C}.$$

Vi har $\dfrac{s^2}{(s-3)(s+1)}=1+\dfrac{9/4}{s-3}+\dfrac{-1/4}{s+1}$, och $\delta_3(s)=\delta(s-3)$,

så tabell och räkneregler ger

$$y(t)=\delta(t)+\frac{9}{4}e^{3t}\chi(t)-\frac{1}{4}e^{-t}\chi(t)+\frac{A}{2\pi}e^{3t}+\frac{B}{2\pi}e^{-t}.$$

Svar: $y(t)=\delta(t)+\frac{1}{4}(9e^{3t}-e^{-t})\chi(t)+Ce^{3t}+De^{-t}, \quad C,D\in\mathbb{C}.$

3. $u(t) = te^{it}$, $0 \le t < 2\pi$, $T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 2\pi/T = 1$.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{it}e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{i(1-n)t}\,dt = /\text{om } n \neq 1/$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[t\,\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} - 1\cdot\frac{e^{i(1-n)t}}{i^2(1-n)^2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\,\frac{1}{i(1-n)} - \cancel{\frac{1}{i^2(1-n)^2}} - 0 + \cancel{\frac{1}{i^2(1-n)^2}}\right) = \frac{i}{n-1}, \quad n \neq 1.$$

$\hat{u}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \pi$, så:

Delsvar: u:s fourierserie är $\pi e^{it} + \sum_{n\neq 1} \frac{i}{n-1}e^{int}$.

u har generaliserad höger- och vänsterderivata i $t=0$, så satsen om punktvis konvergens ger att fourierseriens summa i $t=0$ är $\frac{u(0+)+u(0-)}{2} = \frac{0+u(2\pi-)}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

4. a) $u(t) = |t^2-1| = \begin{cases} t^2-1, & t \le -1 \\ 1-t^2, & -1 \le t \le 1 \\ t^2-1, & t \ge 1 \end{cases}$

Så $u' = \begin{cases} 2t, & t<-1 \\ -2t, & -1<t<1 \\ 2t, & t>1 \end{cases} + (0-0)\delta_{-1} + (0-0)\delta_1$,

och $u'' = \begin{cases} 2, & t<-1 \\ -2, & -1<t<1 \\ 2, & t>1 \end{cases} + (2-(-2))\delta_{-1} + (2-(-2))\delta_1$.

Svar: $\begin{cases} 2, & |t|>1 \\ -2, & |t|<1 \end{cases} + 4\delta_{-1} + 4\delta_1$.

b) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $t^2u = \delta + t$.

$t^2\delta'' = t(t\delta'') = t(-2\delta') = -2(-\delta) = 2\delta$,

och $t^2\underline{t}^{-1} = t(t\underline{t}^{-1}) = t\cdot 1 = t$, så alla lösningar ges av:

Svar: $u = \frac{1}{2}\delta'' + \underline{t}^{-1} + C\delta' + D\delta$, $C, D \in \mathbb{C}$.

5. $\displaystyle\int_{t-1}^{t} e^{-(t-r)} u(r)\,dr = (1-e^{-t})\chi(t), \quad t\in\mathbb{R}.$

Integralen $= (f*u)(t)$, där $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0\le t\le 1, \\ 0, & \text{annars}. \end{cases}$

$$\hat{f}(s) = \int_0^1 e^{-t}e^{-st}\,dt \overset{s\neq -1}{=} \left[\frac{e^{-(1+s)t}}{-(1+s)}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-(1+s)}}{s+1}, \quad s\in\mathbb{C}$$

(analytisk fkn, hävbar sing. i $s=-1$). Laplacetransform ger:

$$\frac{1-e^{-(1+s)}}{s+1}\hat{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap\,]0,\infty[\,.$$

Om $\operatorname{Re} s > 0$ fås $\hat{u}(s) = \dfrac{1}{s(1-e^{-(1+s)})} = \Big/ \,|e^{-(1+s)}| < e^{-1} < 1\, \Big/$

$= \frac{1}{s}(1 + e^{-1}e^{-s} + e^{-2}e^{-2s} + \dots), \quad \operatorname{Re} s > 0$, så:

Svar: $u(t) = \chi(t) + \frac{1}{e}\chi(t-1) + \frac{1}{e^2}\chi(t-2) + \dots, \quad t\in\mathbb{R}.$

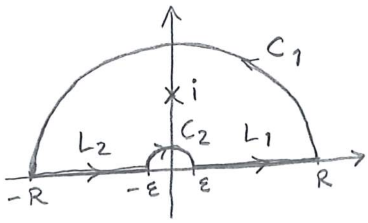
6. $u(t) = \dfrac{1}{\cosh t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}}, \quad t\in\mathbb{R}.$

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-i\omega t}}{e^t+e^{-t}}\,dt = \Big/ \begin{matrix} t = \ln r \\ dt = \frac{1}{r}dr \end{matrix} \Big/ = \int_0^\infty \frac{2e^{-i\omega \ln r}}{r^2+1}\,dr.$$

Betrakta $\displaystyle\int_{\dots} \frac{2e^{-i\omega(\ln|z| + i\arg z)}}{z^2+1}\,dz$, med $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$,

(För fixt $\omega\in\mathbb{R}$ ger att $|e^{-i\omega(\ln|z|+i\arg z)}|$ är begränsat.)

längs konturen



.

$$\int_{L_1+C_1+L_2+C_2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{2e^{-i\omega(\ln|z|+i\arg z)}}{z^2+1} = 2\pi i\,\frac{2e^{-i\omega(0+i\pi/2)}}{2i} =$$

$= 2\pi e^{\pi\omega/2}$ (då $0<\varepsilon<1$ och $R>1$).

ML-uppskattningar ger att $\int_{C_1} \to 0$, $R\to\infty$, och $\int_{C_2}\to 0$, $\varepsilon\to 0+$.

$\int_{L_1} \to \hat{u}(\omega)$, och $\int_{L_2} \to e^{\pi\omega}\hat{u}(\omega)$, då $\varepsilon\to 0+$ och $R\to\infty$.

Detta ger:

Svar: $\hat{u}(\omega) = \dfrac{2\pi e^{\pi\omega/2}}{e^{\pi\omega}+1} = \dfrac{\pi}{\cosh\frac{\pi\omega}{2}}, \quad \omega\in\mathbb{R}.$

7. $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, u 2π-periodisk, $|\hat{u}(n)| \le Ce^{-\varepsilon|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Satsen om punktvis konvergens ger för varje $k \ge 0$ att

$$u^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u^{(k)}}(n)\, e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^k n^k \hat{u}(n) e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

så $|u^{(k)}(0)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^k |\hat{u}(n)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^k C e^{-\varepsilon|n|} \le 2C \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-\varepsilon n}$.

Sätt $f(x) = x^k e^{-\varepsilon x}$, $x \ge 0$. $f'(x) = x^{k-1} e^{-\varepsilon x}(k - \varepsilon x)$,

x	0		k/ε	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

, så integraluppskattningar ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \le \int_0^\infty f(x)\,dx + f(k/\varepsilon) = \int_0^\infty x^k e^{-\varepsilon x}\,dx + \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^k e^{-\varepsilon k/\varepsilon} =$$

$$= \frac{k!}{\varepsilon^{k+1}} + \frac{k^k e^{-k}}{\varepsilon^k} \le \frac{k!}{\varepsilon^{k+1}} + \frac{k!}{\varepsilon^k} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{k!}{\varepsilon^k}.$$

Detta ger att $\left| \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \le \frac{2C(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{|t|}{\varepsilon}\right)^k$, så om $|t| < \varepsilon$ är serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k$ konvergent, genom jämförelse med geometriska serien.

(Liknande uppskattningar av resttermen ger att $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k$ då $|t| < \varepsilon$.)