Lösningar, TATA77, 2023-08-23

1. $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 6 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $y(0) = 3$, $y(1) = 4$.

Enkelsidig z-transform ger ($Y = \mathcal{Z}_+ y$):

$$z^2 Y(z) - 3z^2 - 4z - 5(zY(z) - 3z) + 6Y(z) = \frac{6z}{z-2},$$

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = \frac{6z}{z-2} + 3z^2 - 11z = \frac{3z^3 - 17z^2 + 28z}{z-2},$$

$$Y(z) = z \frac{3z^2 - 17z + 28}{(z-3)(z-2)^2} = z\left(\frac{4}{z-3} + \frac{-6}{(z-2)^2} + \frac{-1}{z-2}\right) =$$

$$= \frac{4z}{z-3} - \frac{6z}{(z-2)^2} - \frac{z}{z-2}, \quad |z| > 3.$$

Tabell ger: $y(n) = 4 \cdot 3^n \chi(n) - 3n \cdot 2^n \chi(n) - 2^n \chi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, så:

<u>Svar:</u> $y(n) = 4 \cdot 3^n - (3n+1) \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. $y = Sx$ ger att $y'' + 4y' + 3y = x''' + x'$, så impulssvaret h uppfyller $h'' + 4h' + 3h = \delta''' + \delta'$. Laplacetransform ger att

$(s^2 + 4s + 3)\hat{h}(s) = s^3 + s$, och $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$, så

$$\hat{h}(s) = \left(\frac{s^3 + s}{(s+1)(s+3)}, \ \mathrm{Re}\, s > -1\right)_{\mathcal{H}'} + 2\pi C \delta_{-1}(s) + 2\pi D \delta_{-3}(s) =$$

$$= \left(s - 4 - \frac{1}{s+1} + \frac{15}{s+3}, \ \mathrm{Re}\, s > -1\right)_{\mathcal{H}'} + 2\pi C \delta_{-1}(s) + 2\pi D \delta_{-3}(s).$$

Inverstransform med tabell ger:

<u>Svar:</u> $h = \delta' - 4\delta - e^{-t}\chi + 15e^{-3t}\chi + Ce^{-t} + De^{-3t}$, $C, D \in \mathbb{C}$.

3. $u(t) = e^{iat}$, $-\pi \le t < \pi$, $T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iat} e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(a-n)t}}{i(a-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n \sin a\pi}{\pi(a-n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Delsvar:</u> Fourierserien är $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin a\pi}{\pi(a-n)} e^{int}$.

u har gen. hö.- och vä.-derivata i $t = \pi$, så satsen om punktvis konvergens ger att

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n \sin a\pi}{\pi(a-n)} e^{in\pi} = \frac{u(\pi+) + u(\pi-)}{2} = \frac{u((-\pi)+) + e^{ia\pi}}{2} =$$

$$= \frac{e^{ia(-\pi)} + e^{ia\pi}}{2} = \cos a\pi, \quad \text{så} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{a-n} = \frac{\pi}{\tan a\pi}.$$

4. a) $u \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\widehat{u(t-a)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-a)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega(t+a)}\,dt =$$

$$= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

b) $u \in S'$, $a \in \mathbb{R}$. Låt $\varphi \in S$.

$$\langle \widehat{u(t-a)}(\omega), \varphi(\omega)\rangle = \langle u(t-a), \hat{\varphi}(t)\rangle = \langle u(t), \hat{\varphi}(t+a)\rangle =$$

$$/\ \hat{\varphi}(t+a) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega(t+a)}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega a}e^{-i\omega t}\,d\omega =$$

$$= \widehat{e^{-ia\omega}\varphi(\omega)}(t), \quad t \in \mathbb{R}\ /$$

$$= \langle u(t), \widehat{e^{-ia\omega}\varphi(\omega)}(t)\rangle = \langle \hat{u}(\omega), e^{-ia\omega}\varphi(\omega)\rangle = \langle e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega), \varphi(\omega)\rangle,$$

så $\widehat{u(t-a)}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$.

c) $u(t)$, $tu(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Derivering under integraltecknet av $\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt$

(här tillåtet) ger: $\hat{u}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}(-it)\,dt$,

så $\int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-i\omega t}\,dt = i\hat{u}'(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

5. $\int_{t-1}^{t}(1-t+r)u(r)\,dr = t\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Integralen $= (f*u)(t)$, där $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1, \\ 0; & \text{annars.}\end{cases}$

$$\hat{f}(s) = \int_0^1 (1-t)e^{-st}\,dt \underset{s\neq 0}{=} \left[(1-t)\frac{e^{-st}}{-s} - (-1)\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^1 = 0 + \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} =$$

$$= \frac{s-1+e^{-s}}{s^2}, \quad s \in \mathbb{C} \quad \text{(analytisk fkn, hävbar sing. i } s=0\text{)}.$$

Laplacetransform ger: $\frac{s-1+e^{-s}}{s^2}\hat{u}(s) = \frac{1}{s^2}$, $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \,]0,\infty[$.

Om $|e^{-s}| < |s-1|$, t.ex. om $\operatorname{Re} s > 2$, så är $s-1+e^{-s} \neq 0$, så en

lösning är $\hat{u}(s) = \frac{1}{s-1+e^{-s}} = \frac{1}{(s-1)(1+e^{-s}/(s-1))} =$

$$= \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{(s-1)^2} - \dots\right), \quad \operatorname{Re} s > 2.$$ (2 ej minsta möjliga.)

Inverstransform med tabell och räkneregler ger:

<u>Svar:</u> $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t-n)^n e^{t-n}}{n!}\chi(t-n)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. $\hat{u} = \lambda u$, $0 \neq u \in S'$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Det följer att $\hat{\hat{u}} = \widehat{\lambda u} = \lambda \hat{u} = \lambda^2 u$. Enligt Fouriers inversions-formel är $\hat{\hat{u}} = 2\pi \check{u}$, så: $2\pi \check{u} = \lambda^2 u$.

Nu fås att $(2\pi)^2 u = (2\pi)^2 \check{\check{u}} = 2\pi (\lambda^2 u)^\vee = \lambda^4 u$, vilket ger att $(2\pi)^2 = \lambda^4$ (ty $u \neq 0$).

Möjliga värden på λ är alltså $\underline{\pm\sqrt{2\pi}, \pm i\sqrt{2\pi}}$.

Om $\lambda^2 = 2\pi$ fås $2\pi \check{u} = 2\pi u$, dvs u är jämn, och om $\lambda^2 = -2\pi$ fås $2\pi \check{u} = -2\pi u$, dvs u är udda.

7. Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin(\omega/2^n)}{\omega/2^n}\, d\omega = \pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Sätt, för $a > 0$, $p_a(t) = \begin{cases} 1/2a, & |t| \leq a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$ Då är $\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)\,dt = 1$,

och $\widehat{p_a}(\omega) = \frac{\sin a\omega}{a\omega}$ (ur $\mathcal{F}$-tabell).

Så $\frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \cdots \frac{\sin(\omega/2^n)}{\omega/2^n} = \widehat{p_1}(\omega)\widehat{p_{1/2}}(\omega) \cdots \widehat{p_{1/2^n}}(\omega) =$

$= (p_1 * p_{1/2} * \cdots * p_{1/2^n})^\wedge(\omega)$, och Fouriers inv. formel ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdots \frac{\sin(\omega/2^n)}{\omega/2^n}\, d\omega = 2\pi (p_1 * p_{1/2} * \cdots * p_{1/2^n})(0) = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi,$$

ty $p_1 = \frac{1}{2}$ då $|t| \leq 1$, så $p_1 * p_{1/2} = \frac{1}{2}$ då $|t| \leq 1 - \frac{1}{2}$, så $p_1 * p_{1/2} * p_{1/2^2} = \frac{1}{2}$ då $|t| \leq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$, och så vidare.

Eftersom $1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^n} > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$ följer att $(p_1 * \cdots * p_{1/2^n})(0) = \frac{1}{2}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.