Lösningar, TATA77, 2024-01-03

1. $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4e^{3t}$, $t \geq 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Enkelsidig laplacetransform ger ($Y = \mathcal{L}_+ y$):

$$s^2 Y(s) - 1s - 2 - 2(sY(s) - 1) - 3Y(s) = \frac{4}{s-3},$$

$$(s-3)(s+1)Y(s) = \frac{4}{s-3} + s = \frac{s^2-3s+4}{s-3},$$

$$Y(s) = \frac{s^2-3s+4}{(s-3)^2(s+1)} = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1/2}{s-3} + \frac{1/2}{s+1}, \quad \text{Re } s > 3.$$

Inverstransform med tabell ger $y(t)$.

Svar: a) $\dfrac{s^2-3s+4}{(s-3)^2(s+1)}$, $\text{Re } s > 3$.

b) $(t+\frac{1}{2})e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$, $t \geq 0$.

2. $y'(t) + 2y(t) = \delta'(t) + 3e^{-|t|}$.

Fouriertransform ger: $i\omega \hat{y}(\omega) + 2\hat{y}(\omega) = i\omega \cdot 1 + 3 \cdot \dfrac{2}{1+\omega^2}$,

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega}{2+i\omega} + \frac{6}{(2+i\omega)(1+\omega^2)} = 1 - \frac{2}{2+i\omega} + \frac{-2}{2+i\omega} + \frac{-2i\omega+4}{1+\omega^2} =$$

$$= 1 - \frac{4}{2+i\omega} + \frac{-2i\omega}{1+\omega^2} + \frac{4}{1+\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$ Tabell ger:

Svar: $y(t) = \delta(t) - 4e^{-2t}\chi(t) + e^{-|t|}\,\text{sgn}\, t + 2e^{-|t|}$.

3. $u(t) = e^t + e^{-t}$, $-\pi \leq t < \pi$, $T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 1$.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^t + e^{-t})e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in} + \frac{e^{-(1+in)t}}{-(1+in)}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{\pi}(-1)^n}{1-in} - \frac{e^{\pi}(-1)^n}{1+in} - \frac{e^{-\pi}(-1)^n}{1-in} + \frac{e^{-\pi}(-1)^n}{1+in}\right) = \ldots = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Delsvar: Fourierserien är $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} e^{int}$.

u har gen. hö.- och vä.-deriv. i $t=\pi$, och är kont. i $t=\pi$, så satsen om punktvis konvergens ger att (ty $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ är konv.):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} e^{in\pi} = e^{\pi} + e^{-\pi},$$ vilket ger att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}.$$

4. $u_n(t) = n\cos nt$, $|t| \le \frac{\pi}{2n}$, och $u_n(t) = 0$, $|t| > \frac{\pi}{2n}$ $(n \ge 1)$.

Låt $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. $\langle u_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} n\cos nt \cdot \varphi(t)\,dt =$

$= \int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} n\cos nt \cdot (\varphi(0) + \varphi_1(t)t)\,dt$, där $|\varphi_1(t)| \le C$, $t \in \mathbb{R}$, för ngt C.

$$\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} n\cos nt \cdot \varphi(0)\,dt = \varphi(0)\Big[\sin nt\Big]_{-\pi/2n}^{\pi/2n} = \varphi(0)(1-(-1)) = 2\varphi(0),$$

och $\left|\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} n\cos nt \cdot \varphi_1(t)t\,dt\right| \le n \cdot 1 \cdot C \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{n} \longrightarrow 0$ då $n \to \infty$,

så $\langle u_n, \varphi\rangle \longrightarrow 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi\rangle$ då $n \to \infty$.

<u>Svar:</u> 2δ.

5. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \chi(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-1}$, $|z| > 1$, så $\chi(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1/z}{1/z - 1}$, $|1/z| > 1$, dvs:

$\chi(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-z}$, $0 < |z| < 1$.

Z-transformering av ekvationen ger:

$z^2\hat{y}(z) - 3z\hat{y}(z) + 2\hat{y}(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| \in R_y \cap \,]0,1[$,

så $\hat{y}(z) = \frac{-1}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$, $|z| \in R_y$,

där $R_y = \,]0,1[$ eller $]1,2[$ eller $]2,\infty[$, men enbart $R_y = \,]0,1[$ ger en lösning.

$2^n\chi(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - z/2}$, $0 < |z/2| < 1$, dvs $\frac{2}{2-z}$, $0 < |z| < 2$.

$n\chi(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} -z\,\frac{-(-1)}{(1-z)^2}$, $0 < |z| < 1$, dvs $\frac{-z}{(1-z)^2}$, $0 < |z| < 1$,

så $(n-1)\chi(-(n-1)) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{-1}{(1-z)^2}$, $0 < |z| < 1$. Detta ger:

$y(n) = \frac{1}{2}2^n\chi(-n) - (n-1)\chi(-n+1) - \chi(-n) = \Big/\, (n-1) = 0$ då $n = 1 \,\Big/$

$= (2^{n-1} - (n-1) - 1)\,\chi(-n)$.

<u>Svar:</u> $y(n) = (2^{n-1} - n)\chi(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. $y(t) = \underline{t}^{-1} * e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$

$\underline{t}^{-1}$ är tempererad och $e^{-t^2/2} \in S$, så y är väldefinierad

och $\hat{y}(\omega) = \widehat{\underline{t}^{-1}}(\omega)\,\widehat{e^{-t^2/2}}(\omega) = -\pi i \operatorname{sgn}\omega \cdot \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2} =$

$= c e^{-\omega^2/2} \operatorname{sgn}\omega$, där $c = -\pi i \sqrt{2\pi}$.

Detta ger $\hat{y}'(\omega) = c e^{-\omega^2/2}(-\omega)\operatorname{sgn}\omega + c e^{-\omega^2/2} \cdot 2\delta(\omega) =$

$= -c\omega e^{-\omega^2/2} \operatorname{sgn}\omega + 2c\delta(\omega).$

Nu fås att $(y'' + ty' + y)\hat{\ } = -\omega^2\hat{y} + i(i\omega\hat{y})' + \hat{y} = -\omega^2\hat{y} - \omega\hat{y}' - \cancel{\hat{y}} + \cancel{\hat{y}} =$

$= -\omega(\hat{y}' + \omega\hat{y}) = -\omega \cdot 2c\delta(\omega) = 0$, så $\underline{y'' + ty' + y = 0}$.

7. $u \in \mathcal{L}^1_T$ och $|u(t+h) - u(t)| \le C|h|^\alpha, \quad t, h \in \mathbb{R} \quad (C \ge 0,\ 0 < \alpha \le 1).$

$\int_T (u(t+h) - u(t))e^{-in\Omega t}\,dt = (e^{in\Omega h} - 1)\hat{u}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{R} \quad (\Omega = 2\pi/T),$

så med $h = \frac{1}{n\Omega}$ (för $n \neq 0$) fås:

$$(e^i - 1)\hat{u}(n) = \int_T \left(u\left(t + \tfrac{1}{n\Omega}\right) - u(t)\right)e^{-in\Omega t}\,dt, \quad n \neq 0.$$

Detta ger:

$$|e^i - 1||\hat{u}(n)| \le \int_T \left|u\left(t + \tfrac{1}{n\Omega}\right) - u(t)\right| \cdot |e^{-in\Omega t}|\,dt \le$$

$$\le C\left|\tfrac{1}{n\Omega}\right|^\alpha \cdot 1, \quad n \neq 0.$$

Så $|\hat{u}(n)| \le D|n|^{-\alpha}, \quad n \neq 0$, där $D = \dfrac{C}{|e^i - 1|\Omega^\alpha}$.