Lösningar, TATA77, 2024-10-29

1. $y''(t) - y(t) = 2\delta''(t) + 3e^{-2|t|}$.

Fouriertransform ger: $(i\omega)^2\hat{y}(\omega) - \hat{y}(\omega) = 2(i\omega)^2\cdot 1 + \dfrac{3\cdot 2\cdot 2}{2^2+\omega^2}$,

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2\omega^2}{1+\omega^2} - \frac{12}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} = 2 - \frac{2}{1+\omega^2} - \left(\frac{4}{1+\omega^2} + \frac{-4}{4+\omega^2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{6}{1+\omega^2} + \frac{4}{4+\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad \text{Tabell ger:}$$

Svar: $y(t) = 2\delta(t) - 3e^{-|t|} + e^{-2|t|}$.

2. $\sum_{k=0}^{n} (n-k)u(k) = 2^{n+1} - 2(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Enkelsidig z-transform ger ($U = \mathcal{Z}_+ u$): $\dfrac{z}{(z-1)^2}U(z) = \dfrac{2z}{z-2} - \dfrac{2z}{z+1}$,

$$\frac{z}{(z-1)^2}U(z) = \frac{6z}{(z-2)(z+1)}, \quad U(z) = z\,\frac{6(z-1)^2}{z(z-2)(z+1)} = z\left(\frac{-3}{z} + \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z+1}\right) =$$

$$= -3 + \frac{z}{z-2} + \frac{8z}{z+1}, \quad |z| > 2. \quad \text{Tabell ger:}$$

Svar: $u(n) = -3\delta(n) + 2^n + 8(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

3. $u(t) = \sin t, \ |t| \le \pi, \quad u(t) = 0, \ |t| > \pi$.

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot e^{-i\omega t}\,dt = \left[-\cos t \cdot e^{-i\omega t}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(-\cos t)e^{-i\omega t}(-i\omega)\,dt =$$

$$= e^{-i\omega\pi} - e^{i\omega\pi} - i\omega\left(\left[\sin t \cdot e^{-i\omega t}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin t\, e^{-i\omega t}(-i\omega)\,dt\right) =$$

$$= -2i\sin \pi\omega + \omega^2\hat{u}(\omega), \quad \text{så:}$$

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{2i\sin\pi\omega}{1-\omega^2} \quad (\text{för } \omega \neq \pm 1, \text{ men } u \in L^1(\mathbb{R}), \text{ så } \hat{u} \text{ kont.}).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\pi\omega}{(1-\omega^2)^2}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}|\hat{u}(\omega)|^2\,d\omega \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|^2\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\pi\omega}{1-\omega^2}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2i}\hat{u}(\omega)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi\omega} - e^{-i\pi\omega}\right)d\omega = $$ inv. formeln (u har gen. hö.- och vä.-deriv. överallt.)

$$= \frac{\pi}{2}\left(u(\pi) - u(-\pi)\right) = \frac{\pi}{2}(0-0) = 0.$$

4. $\int_0^\pi e^r u(t-r)\,dr = \cos 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad T=\pi \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$

$VL = \pi(f *_T u)(t)$, där $f(t)=e^t$, $0 \le t < \pi$, och f π-periodisk.

$HL = \frac{1}{2}e^{i\cdot 2\cdot 2t} + \frac{1}{2}e^{i(-2)2t}$, så $\widehat{VL}(n) = \widehat{HL}(n)$ ger: $\pi \hat{f}(n)\hat{u}(n) = \begin{cases} 1/2, & n=\pm 2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$

$\hat{f}(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^t e^{-in2t}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(1-i2n)t}}{1-i2n}\right]_0^\pi = \frac{e^\pi - 1}{\pi(1-i2n)}, \quad n \in \mathbb{Z},$

vilket ger $\hat{u}(2) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi(1-4i)}{e^\pi - 1}$, $\hat{u}(-2) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi(1+4i)}{e^\pi-1}$ och $\hat{u}(n)=0$, $n \neq \pm 2$.

Så $u(t) = \frac{1}{2(e^\pi - 1)}\left((1-4i)e^{i4t} + (1+4i)e^{-i4t}\right) = \frac{1}{2(e^\pi-1)}(2\cos 4t + 8\sin 4t).$

Svar: $u(t) = \dfrac{\cos 4t + 4\sin 4t}{e^\pi - 1}, \quad t \in \mathbb{R}.$

5. $u(t) + \int_t^\infty 2e^{t-r}u(r)\,dr = 3\chi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Integralen $= (f*u)(t)$, där $f(t) = 2e^t\chi(-t)$.

$e^{-t}\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}$, $\operatorname{Re} s > -1$

$e^t\chi(-t) \quad \frac{1}{(-s)+1}$, $\operatorname{Re}(-s) > -1$

Laplacetransform ger:

$\hat{u}(s) + \frac{-2}{s-1}\hat{u}(s) = \frac{3}{s}$, $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \,]0,1[$.

$\frac{s-3}{s-1}\hat{u}(s) = \frac{3}{s}$, $\hat{u}(s) = \frac{3(s-1)}{s(s-3)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3}$, $0 < \operatorname{Re} s < 3$.

($\operatorname{Re} s < 0$ eller $\operatorname{Re} s > 3$ ger ej överlapp med $]0,1[$.)

Inverstransform ger $\chi(t) - 2e^{3t}\chi(-t)$ (men u är högerkont., ty HL är högerkont. och faltningen är kont.).

Svar: $u(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ -2e^{3t}, & t < 0. \end{cases}$

6. Sätt $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{i}\ln\left|\frac{\omega+1}{\omega-1}\right| = \frac{1}{i}\ln|\omega+1| - \frac{1}{i}\ln|\omega-1|$.

Då är $i\hat{u}'(\omega) = (\omega+1)^{-1} - (\omega-1)^{-1}$.

$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$

$\chi(t) \quad -i\omega^{-1} + \pi\delta(\omega)$

$\operatorname{sgn} t = 2\chi(t) - 1 \quad -2i\omega^{-1}$

så:

$-\frac{1}{2i}e^{-it}\operatorname{sgn} t \xrightarrow{\mathcal{F}} (\omega+1)^{-1}$

$\frac{1}{2i}e^{it}\operatorname{sgn} t \quad -(\omega-1)^{-1}$

Detta ger $(\sin t)\operatorname{sgn} t \xrightarrow{\mathcal{F}} i\hat{u}'(\omega)$ och eftersom $\widehat{tu(t)}(\omega) = i\hat{u}'(\omega)$ fås $tu(t) = (\sin t)\operatorname{sgn} t$, $u(t) = \frac{\sin t}{t}\operatorname{sgn} t + C\delta(t)$, ngt $C \in \mathbb{C}$.

($\frac{\sin t}{t}$ har hävbar singularitet i $t=0$.)

$\hat{u}(-\omega) = \frac{1}{i}\ln\left|\frac{-\omega+1}{-\omega-1}\right| = \frac{1}{i}\ln\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right| = -\hat{u}(\omega)$, dvs $\hat{u}$ är udda, så u är udda. $\frac{\sin t}{t}\operatorname{sgn} t$ är också udda, så $C=0$. ($\delta(t)$ är jämn.)

Svar: $\dfrac{\sin t}{t}\operatorname{sgn} t.$

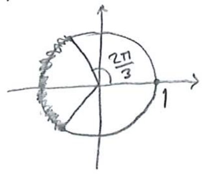
7. u 2π-periodisk, $|u(t+h)-u(t)| \le C|h|$, $t,h \in \mathbb{R}$.

$T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 1$. Sätt $v_h(t) = u(t+h) - u(t)$.

Då är $\hat{v}_h(n) = e^{inh}\hat{u}(n) - \hat{u}(n) = (e^{inh}-1)\hat{u}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Låt $m \in \mathbb{N}$ och sätt $h = \dfrac{2\pi}{3 \cdot 2^m}$. Om $2^m \le |n| < 2^{m+1}$

så gäller att $|e^{inh} - 1| \geq \sqrt{3}$, så



$$\sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{u}(n)|^2 \le \frac{1}{\sqrt{3}^2} \sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{v}_h(n)|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{v}_h(n)|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v_h(t)|^2\,dt \le \frac{1}{3}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C^2h^2\,dt =$$

$$= \frac{C^2 \cdot 4\pi^2}{3 \cdot 9 \cdot 2^{2m}} = \frac{C'}{2^{2m}} \quad \text{(där } C' \text{ inte beror på } m\text{).}$$

Nu fås
$$\sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{u}(n)| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \Big(\sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} 1^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{u}(n)|^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le (2 \cdot 2^m)^{1/2} \left(\frac{C'}{2^{2m}}\right)^{1/2} = \frac{C''}{2^{m/2}} \quad \text{(där } C'' \text{ inte beror på } m\text{).}$$

Detta ger att
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)| = |\hat{u}(0)| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{u}(n)| \le$$

$$\le |\hat{u}(0)| + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C''}{2^{m/2}} < \infty \quad \text{(konvergent geometrisk serie),}$$

så u:s fourierserie är absolutkonvergent.