Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2020-10-27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Låt y vara den lösning till ekvationen $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2e^{2t}$, $t \geq 0$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 4$. Ange

   (a) $(\mathscr{L}_+ y)(s)$, (b) $y(t)$.

2. Ange en lösning u till ekvationen $u(n) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k u(n-k) = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Bestäm det $u \in \mathcal{S}'$ vars fouriertransform är $i\omega^2/(\omega + 3i)$. (1p)

   (b) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $tu = 2\delta' + 3t + 4$. (1p)

   (c) Bestäm tu om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ges av $\langle u, \varphi \rangle = -\int_0^\infty (\ln t)\varphi'(t)\,dt$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. (1p)

4. Låt u vara den π-periodiska funktion som ges av $u(t) = e^t$ då $0 \leq t < \pi$.

   (a) Bestäm u:s fourierserie. (1p)

   (b) Ange summan av u:s fourierserie i punkten $t = \pi$. (1p)

   (c) Beräkna summan av serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/(4n^2 + 1)$. (1p)

5. Använd laplacetransform för att bestämma alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 4e^t \chi(2 - t).$$

6. För ett LTI-system S gäller att om insignalen x ges av $x(t) = 1$ då $|t| \leq 1$ och $x(t) = 0$ då $|t| > 1$, så fås utsignalen $y(t) = (e^{2t} - e^{-2t})e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm impulssvaret h för S, under förutsättning att h är en integrerbar funktion.

7. Låt $u(t) = e^{ie^{-t}}$, $t \in \mathbb{R}$. Visa att u:s laplacetransform i distributionsmening ges av en analytisk funktion med definitionsmängd $\{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s > 0\}$.

Lycka till!