Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2021-10-27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Ange den lösning y till ekvationen $y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = 6\delta(t-1)$, $t \geq 0$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = -3$.

2. Ange en lösning u till ekvationen $u(n) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4(n-k)u(k) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Bestäm en lösning u till ekvationen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)e^{-|r|}\,dr = 2e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. (a) Bestäm laplacetransformen av funktionen $e^{-t}\chi(3-t)$, $t \in \mathbb{R}$. (1p)
   (b) Bestäm den distribution som har laplacetransform $s/(s-1)$, $\operatorname{Re} s < 1$. (1p)
   (c) Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att $a \in \mathbb{R}$. Visa att distributionen $u(t-a)$ har laplacetransformen $e^{-as}\hat{u}(s)$. (1p)

5. Funktionen u har period 2π och ges av $u(t) = t^2$ då $-\pi \leq t < \pi$. Visa att
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t) - (S_N u)(t)|^2\,dt \leq \frac{8}{3N^3}, \quad N \geq 1.$$
($S_N u$ är den N:te symmetriska delsumman av u:s fourierserie.)

6. Låt $u(t) = \ln(t^4+1)$, $t \in \mathbb{R}$. Visa att u:s fouriertransform i distributionsmening ges, för $\omega > 0$, av en kontinuerlig funktion $f(\omega)$ sådan att $\lim_{\omega\to 0+} \omega f(\omega) = -4\pi$.

7. Låt $0 \leq a < b \leq 2\pi$ och antag att u är en 2π-periodisk funktion sådan att $u(t) = 0$ då $0 \leq t < a$ och då $b \leq t < 2\pi$, och $u(t) = f(t)$ då $a \leq t < b$, där f är en funktion som är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av intervallet $[a,b]$. Visa att det finns en konstant $C \geq 0$ sådan att $|(S_N u)(t)| \leq C$ för alla $t \in \mathbb{R}$ och $N \in \mathbb{N}$.

Lycka till!