Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2024-10-29 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Ange en lösning till differentialekvationen $y''(t) - y(t) = 2\delta''(t) + 3e^{-2|t|}$.

2. Ange en lösning u till ekvationen $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)u(k) = 2^{n+1} - 2(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Låt $u(t) = \sin t$ då $|t| \leq \pi$ och $u(t) = 0$ då $|t| > \pi$. Bestäm u:s fouriertransform och använd resultatet för att beräkna värdena på integralerna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\omega}{(1-\omega^2)^2}\, d\omega \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\omega}{1-\omega^2}\, d\omega.$$

4. Bestäm en π-periodisk lösning u till integralekvationen
$$\int_0^{\pi} e^r u(t-r)\, dr = \cos 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Svaret ska förenklas så att det inte innehåller några icke-reella tal.

5. Använd laplacetransform för att bestämma en lösning u till integralekvationen
$$u(t) + \int_t^{\infty} 2e^{t-r} u(r)\, dr = 3\chi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

6. Bestäm den tempererade distribution vars fouriertransform är $\dfrac{1}{i} \ln \left| \dfrac{\omega+1}{\omega-1} \right|$.

7. Antag att u är en 2π-periodisk funktion sådan att det för någon konstant C gäller att $|u(t+h) - u(t)| \leq C|h|$ för alla $t, h \in \mathbb{R}$. Visa att u:s fourierserie är absolutkonvergent.

Lycka till!