TATA78 Komplex analys fk, 6 hp, vt1–vt2 2025

Kursen är en fortsättning på och fördjupning av TATA45 Komplex analys och består av nedanstående tre delar, vardera med sex föreläsningar (FÖ) och två problemseminarier (SE).

Del A: Tillämpad komplex analys (FÖ 1–6, SE 1–2)

• **Residykalkyl de luxe och Riesz sats**: Vi går här längre än i grundkursen TATA45 och studerar hur man kan summera vissa numeriska serier. Dessutom bevisar vi ett klassiskt resultat av Marcel Riesz om Maclaurinseriers konvergens på randen till konvergensskivan. Ett alternativt sätt att beräkna vissa integraler av Fouriertyp presenteras också.
• **Stabilitetskriterier i reglerteknik**: Som en naturlig fortsättning på avsnittet om argumentprincipen i TATA45 tar vi här upp Routh-Hurwitz stabilitetskriterium för tidskontinuerliga system (bygger på s.k. Sturmkedjor för polynom och Euklides algoritm) och Schur-Cohns stabilitetskriterium för tidsdiskreta system (bygger på s.k. Schurtransformer av polynom).
• **Mer om konform avbildning**: I TATA45 är Möbiusavbildningarna mer eller mindre de enda konforma avbildningar som studeras, om än i detalj. Här tar vi ett större grepp med andra typer av avbildningar, i synnerhet Schwarz-Christoffel-avbildningen som tar övre halvplanet på en (generaliserad) polygon. Detta kräver bl.a. en fördjupad förståelse av grenar till flervärda analytiska funktioner, och vi detaljstuderar (principal)grenar till logaritmen, rotfunktionen och de inversa trigonometriska och hyperboliska funktionerna. Tillämpningar på elektriska fält, temperaturfördelningar och strömningsproblem diskuteras.

Del B: Riemannsfären och analytisk fortsättning (FÖ 7–12, SE 3–4)

• **Komplex analys på Riemannsfären**: I TATA45 har vi nosat lite på Riemannsfären $\hat{\mathbb{C}}$ i samband med Möbiusavbildningar. Här definierar vi vad det betyder att en funktion är analytisk eller har pol respektive väsentlig singularitet i ∞. De meromorfa funktionerna (d.v.s. funktionerna som är analytiska förutom att de får ha poler) på Riemannsfären studeras ingående – dessa visar sig vara de rationella funktionerna – och deras multipla punkter och beteende nära dessa undersöks; detta leder till begrepp som förgreningspunkter, överlagringar och cykliska omgivningar.
• **Analytisk och meromorf fortsättning**: Grundbegreppet här är meromorfa funktionselement (f, D), där D är ett område (en öppen sammanhängande mängd) på Riemannsfären och f är meromorf på D. Vi studerar när och hur dessa kan fortsättas till andra områden – i ett eller flera steg – och vilka problem som finns med det, och vi tar också upp analytisk fortsättning via potensserier. Därefter går vi vidare och behandlar meromorf fortsättning längs kurvor, vilket leder till begrepp som homotopa kurvor och resultat om entydig fortsättning i enkelt sammanhängande områden (monodromisatsen).

Del C: Riemannytor (FÖ 13–18, SE 5–6)

• **Konkreta Riemannytor**: I del B ser vi att meromorf fortsättning av ett funktionselement kan ge upphov till olika funktioner på samma område – typexemplet är logaritmen. Riemanns idé, som vi utvecklar här, är att i stället för att i en sådan situation begränsa funktionens värden (via grenar) utvidgar vi dess definitionsmängd, som då inte längre behöver bli områden på Riemannsfären utan i stället mera allmänna s.k. Riemannytor, ett begrepp som preciseras senare. Vi konstruerar också dessa ytor för bl.a. $\log z$, $z^{1/q}$ (q heltal), $p(z)^{1/2}$ (p polynom), $\arctan z$ och $\arcsin z$, och ser hur man kan hantera förgreningspunkter i några konkreta exempel.
• **Abstrakta Riemannytor**: Här tittar vi på s.k. komplexa strukturer på ytor och definierar vad Riemannytor verkligen är: ytor som täcks av en atlas med kartor där övergångarna mellan överlappande kartor beskrivs av vanliga analytiska funktioner. Vi studerar analytiska och meromorfa funktioner på Riemannytor, och även s.k. holomorfa avbildningar mellan sådana ytor. Avslutningsvis konstruerar vi en oförgrenad Riemannyta till varje flervärd meromorf funktion, alltså en yta på vilken den flervärda funktionen kan ses som envärd, m.h.a. s.k. groddar till meromorfa funktioner, och diskuterar hur vissa förgreningspunkter kan anslutas till denna.

Var god vänd!

Litteratur

J-S: Jones-Singerman, *Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press

A: Alexandersson, *TATA45 Komplex analys* (kompendium), 2023 eller 2021, Bokab eller pdf

Föreläsningsprogram

Del A: Tillämpad komplex analys

Fö 1	Beräkning av vissa summor (A 5.6). Något om potensseriers konvergens på randen till konvergensskivan (A 4.8)
Fö 2	Potensseriers konvergens på randen, avslutning (A 4.8). Routh-Hurwitz metod (A 6.3)
Fö 3	Schur-Cohns kriterium (A 6.4). Grenar till elementära funktioner (A 2)
Fö 4	Mer om grenar (A 2, 8.1, 8.2). Arcusfunktioner (A 8.3)
Fö 5	Arcusfunktioner (A 8.4, 8.5). Konform avbildning, framför allt Schwarz-Christoffels metod (A 9.1)
Fö 6	Exempel på och tillämpningar av Schwarz-Christoffels metod (A 9.2, 9.3, 9.4)

Del B: Riemannsfären och analytisk fortsättning

Fö 7	Analytiska och meromorfa funktioner i områden på Riemannsfären (J-S 1.1, 1.3)
Fö 8	Rationella funktioner. Multipelpunkter (J-S 1.3, 1.4; A 4.7)
Fö 9	Förgreningspunkter, överlagringar och cykliska omgivningar (J-S 1.5)
Fö 10	Funktionselement. Entydighetssatsen för meromorfa funktioner. Direkt och indirekt fortsättning (J-S 4.1)
Fö 11	Analytisk fortsättning med potensserier (J-S 4.2). Reguljära och singulära punkter för funktionselement (J-S 4.3). Meromorf [analytisk] fortsättning längs kurvor (J-S 4.4)
Fö 12	Homotopier. Monodromisatsen (J-S 4.5)

Del C: Riemannytor

Fö 13	Riemannytorna till $\log z$ och $z^{1/q}$; förgreningspunkter (J-S 4.7, 4.8)
Fö 14	Riemannytor till $p(z)^{1/2}$, p polynom (J-S 4.9)
Fö 15	Exempel på Riemannytor: $(z^3 - z^2)^{1/3}$, $\arcsin z$ och inledning till $(\log z)^{1/2}$ (J-S 4.10)
Fö 16	Inledning till abstrakta Riemannytor (J-S 4.11, 4.12)
Fö 17	Riemannytorna till $\log z$ och $z^{1/q}$ som abstrakta Riemannytor, den senare förgrenad. Kärven av groddar av meromorfa funktioner som topologiskt rum (J-S 4.13)
Fö 18	Kärven av groddar av meromorfa funktioner som Riemannyta, samt hur man lägger till förgreningspunkter (J-S 4.13)

Förkunskapskrav

- TATA45 Komplex analys eller motsvarande
- TATA34 Analys överkurs rekommenderas, i synnerhet för del C, men är inget krav

Undervisning

Undervisningen sker i form av föreläsningar och problemseminarier, se ovan.

Examination

Inlämningsuppgifter och muntlig redovisning vid problemseminarierna.

Lars Alexandersson, 17 september 2024