Svar TATA82 Discrete Mathematics 3/1 2024

1) Show with Math Ind that $\sum_{k=0}^{n}\binom{m-1+k}{m-1}=\binom{n+m}{m}$ for all $n\geq 0$, where $m\geq 1$ is fixed

We prove:

i) True for $n=0$: $VL_0=\binom{m-1+0}{m-1}=\binom{m-1}{m-1}=1=\binom{m}{m}=HL_0$ true

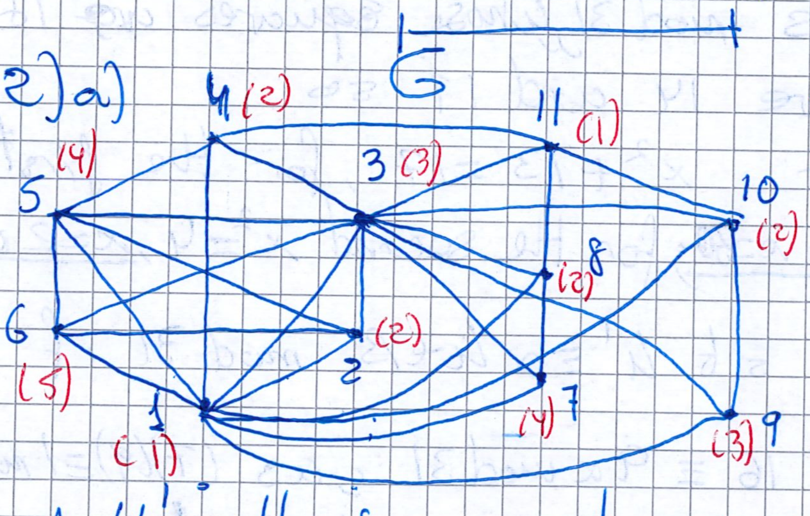
ii) Assume that $\sum_{0}^{n}\binom{m-1+k}{m-1}=\binom{n+m}{m}$ for some $n\geq 0$ and we show:

$$VL_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m-1+k}{m-1}=\sum_{0}^{n}\binom{m-1+k}{m-1}+\binom{m-1+n+1}{m-1}$$

$$\overset{\text{Assumpt}}{=}\binom{n+m}{m}+\binom{n+m}{m-1}\underset{\text{Recurs. Prop. of binomial coeff.}}{=}\binom{n+m+1}{m}=\binom{n+1+m}{m}=HL_{n+1}$$

as wanted

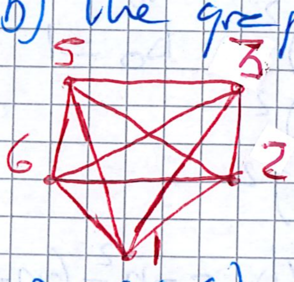
2) a)



The graph is Hamiltonian and the member can send the message as wanted

A Hamiltonian cycle: $1\to 7\to 8\to 11\to 10\to 9\to 3\to 4\to 5\to 6\to 2$

b) The graph is not planar: it contains K_5



c) $\chi(G)=5$; it contains K_5 and there are colorings with 5 colors, as above (1), (2), – –

3) a) As we have no further constrains :
As many as solutions of $x_1 + \dots + x_8 = 24$, $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 8$
, i.e $\binom{24+7}{7} = \binom{31}{7} = \binom{31}{24}$

b) Each arrangement is a list where each robot gets a "label" with the name of the box : 8^{24}

c) Each arrangement is a partition of order 8 :

$$\frac{1}{8!} \binom{24}{3,3,3,3,3,3,3,3}$$

4) Solve, if possible $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv 0 \mod 31$

$x^4 + 26x^2 + 4 \equiv (x^2 + 13)^2 + 4 - 14 \equiv (x^2+13)^2 - 10$

So, we want $(x^2+13)^2 \equiv 10 \mod 31$

Are there numbers mod 31, whose squares 10, 1 and 4

The roots of 10 are 14 and 17 so

$x^2 + 13 = 14$ or $x^2 + 13 = 17$, for the first eq. $x^2 \equiv 1$ $\underline{x = 1 \text{ or } x = 30}$; for the second $x^2 = 4$, $\underline{x = 2 \text{ or } x = 29}$

4b) Find α and β s.t $4' \equiv \alpha 4 + \beta \mod 31$, if

$\begin{cases} (1)\ 11 \equiv 2\alpha + \beta \\ (2)\ 27 \equiv 11\alpha + \beta \end{cases}$ $\overset{(2)-(1)}{\Longleftrightarrow}$ $16 \equiv 9\alpha \mod 31$, as $(7)(9) \equiv 1 \mod 31$

$\underline{\alpha \equiv (16)(7) \equiv 19}$ and $\underline{\beta \equiv 4}$

5) Solve $\begin{cases} (1)\ a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + n^2 \\ (2)\ b_{n+1} = a_n + 2b_n + (n+2)^2 \end{cases}$ $\begin{matrix} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{matrix}$

From (2) $\begin{cases} a_n = b_{n+1} - 2b_n - (n+2)^2 \\ a_{n+1} = b_{n+2} - 2b_{n+1} - (n+3)^2 \end{cases}$

Setting them in (1) $b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = -n^2 - 6n - 3$

$b_0 = 1$, $b_1 = 6$

Caract. eq $r^2 - 5r + 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = 4$

So $b_n^{(h)} = B_1 + B_2 (4)^n$

and righthand-side $f(n) = -n^2 - 6n - 3$

so $b_n^{(p)} = C_1 n^3 + C_2 n^2 + C_3 n$ with equations

$$\begin{cases} 0 C_1 = 0 \\ -9 C_1 = -1 \\ -3 C_1 - 6 C_2 = -6 \\ 3 C_1 - C_2 - 3 C_3 = -3 \end{cases} \qquad C_1 = \frac{1}{9} \quad C_2 = \frac{17}{18} \quad C_3 = \frac{43}{90}$$

$$b_n = B_1 + B_2 (4)^n + \frac{10n^3 + 85n^2 + 43n}{90}$$

$$\begin{cases} b_0 = 1 = B_1 & B_1 = 1 \\ b_1 = 6 = 4B_2 + 1 + \frac{138}{90} & B_2 = \frac{39}{45} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{39}{45} (4)^n + \frac{10n^3 + 85n^2 + 43n + 90}{90}$$

$$a_n = \frac{78}{45} (4)^n - \frac{20n^3 - 10(n+1)^3 + 170n^2 - 85(n+1)^2 - 43n - 47}{90} - (n+2)^2$$

6) We know that $|A \cap B \cap C \cap D| = 30$

$|A \cap B \cap C| = |A \cap C \cap D| = |A \cap B \cap D| = |B \cap C \cap D| = 40$

$|A \cap B| = |A \cap C| = |A \cap D| = |B \cap C| = |B \cap D| = |C \cap D| = 60$

So a) We want $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - 4 |A \cap B \cap D \cap B \cap C| = 160 - 120 = \underline{40}$ student have chosen exactly 3 subjects

b) As for two subjects we have $6(60) - 3(40) - 6(30) = \underline{60}$ since each student taking 3 subject has taken 3 comb. of two subjects and each student taking all 4 subjects have taken all 6 comb. of two subjects

7) Consider $A = \{t ; 1 \le t \le 10^5 ; t \mid 10^5\}$.
We define $\mathcal{D}$ on A as $a\mathcal{D}b$ if a divides b
(a) Show that $(A, \mathcal{D})$ is a lattice
i) given $\{t_1, t_2\} \subseteq A$ we must find
$\text{ms}b\{t_1, t_2\} = \text{lcm}(t_1, t_2)$ always exist
$\text{su}b\{t_1, t_2\} = \text{gcd}(t_1, t_2)$, always exist
ii) smallest element is 1, greatest is 10^5
As $10^5 = (2)^5(5)^5$, A has $\underline{(6)(6) = 36 \text{ elements}}$

iii) Number of edges in Hasse-diagram
is $(2+4+6+8+10)2 = \underline{60}$ edges

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA82, TEN1, 2024–01–03, kl 08–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 9 poäng, för betyg 4, 12 poäng och 16 poäng för betyg 5.

---

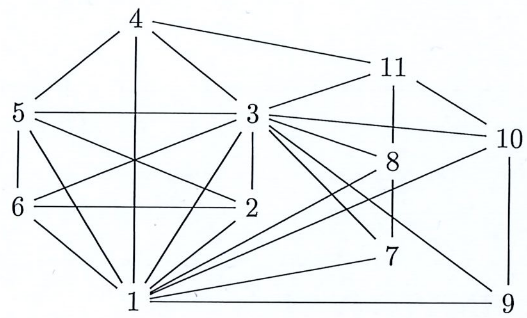
1. Låt $m \geq 1$ vara ett fixerad heltal. Visa med induktionsprincipen att $\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+k}{m-1} = \binom{n+m}{m}$ för alla $n \geq 0$.

2. Nätverket DISKRETA består av elva medlemmar med förbindelser som i grafen G nedan:

   (a) Medlem nr. 1 vill sprida ett meddelande genom att meddelandet överförs från en medlem till en granne i näverket på så sätt att varje medlem får meddelandet precis en gång och medlem nr. 1 får tillbaka meddelandet efter att alla har fått det. Är det möjligt? Motivera svaret. (1p)

   (b) Är grafen G planär? Motivera svaret. (1p)

   (c) Bestäm kromatiska talet till G. När medlemmar vill kommunicera med omvärlden behöver grannarna använda olika kanaler, annars blir det olyckliga interferenser. Hur många kanaler behövs för hela nätverket? Motivera svaret. (1p)



3. (a) På hur många sätt kan man dela 24 lika robotar i 8 olika fack? (1p)

   (b) På hur många sätt kan man dela 24 olika robotar i 8 ordnade fack? (1p)

   (c) På hur många sätt kan man dela 24 olika robotar i 8 (**oordnade**) grupper med 3 robotar i varje grupp? (1p)

4. (a) Lös, om möjligt, $x^4 - 5x^2 \equiv 27 \bmod 31$ (1p)

   (b) En affin kod på ett alfabet med 31 symboler ($1, 2, \ldots, 30, 31$) tar symbolen k till symbolen $k' \equiv \alpha k + \beta \bmod 31$. Bestäm α och β om 2 tas till 11 och 11 till 27. (2p)

5. Lös sytemet av differensekvationer $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + n^2 \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n + n^2 + 4n + 4 \end{cases}$ with $a_0 = 0, b_0 = 1$.

6. TF undervisar i fyra ämnen: A, B, C, D. I en undersökning om vilka ämnen som studenter på TF har valt har man kommit fram till att 30 studenter har valt alla fyra ämnen; att varje kombination av tre ämnen har valts av 40 studenter och att varje kombination av två ämnen har valts av 60 studenter

   (a) Hur många studenter har valt exakt 3 ämnen? (1p)

   (b) Hur många studenter har valt exakt 2 ämnen? (2p)

7. Betrakta mängden av heltalen $A = \{(t; 1 \leq t \leq 100.000,\ t | 100.000\}$. Vi definierar en partialordning $\mathcal{D}$ på A genom $a\mathcal{D}b$ om $a | b$.

   (a) Visa att $(A, \mathcal{D})$ är en lattice. (1p)

   (b) Bestäm antal element i A och dess minsta och största element, om de existerar (1p).

   (c) Beräkna antal kanter i Hasse-diagrammet för $(A, \mathcal{D})$. (1p)