LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

**Tentamen i Diskret Matematik, TATA82, TEN1, 2021–10–22, kl 08–13.**

**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.**

För betyg 3 behövs 9 poäng, för betyg 4, 12 poäng och 16 poäng för betyg 5.

---

1. Visa med induktionsprincipen att $\sum_{k=1}^{n}(k)(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ för alla $n \geq 1$.

2. (a) Visa att ett träd med $n$, $n \geq 3$, noder och $n-1$ löv är isomorfisk till $K_{1,n-1}$, den fullständiga bipartita grafen, med en nod blå och $n-1$ noder vita (1p)

   (b) Bestäm summan av gradtalen av alla noder i ett träd (1p)

   (c) Visa att varje skog är en bipartit graf (1p)

3. (a) I ett kryptosystem krypterar man genom att ta ett tal $t$ och först bestämma dess kubik modulus 13, ta detta nya tal och bestämma dess kvadrat modulus 11, funktionen är $K(t) = (t^3 \bmod 13)^2 \bmod 11$. Bestäm $K(80)$ (1p)

   (b) Bestäm alla positiva heltal som samtidigt delar $a = (2)^2(3)^2(5)^5(2)^4(3)^3(5)^2$ och $b = (2)^4(3)(5)(7)(11)^3(2)^8(11)^{10}(7)^9$ (1p)

   (c) Lös ekvationen $12x^2 + 25x \equiv 10 \bmod 11$. (1p)

4. Ett datorsystem använder kodord av längd 5, 6 eller 7. Varje kodord består av en följd av bokstäver (svenska alfabetet har 29 bokstäver) och siffror ( 8, 7, 3, 4, 5, 6) med villkor att varje kodord innehåller minst en siffra. Hur många kodord finns det?

5. Lös den rekursiva ekvationen $a_{n+3} - 7a_{n+2} + 14a_{n+1} - 8a_n = 2(n+3)(3)^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 2, a_1 = 5$, $a_2 = 14$.

6. På hur många sätt kan man välja utan upprepning 4 tal mellan 1 och 100 på så sätt att alla 4 tal är udda, eller alla 4 är multiplar av 3, eller alla 4 är multiplar av 5?

7. Betrakta mängden $\mathcal{A}$ av alla listor av längd 33 med symbolerna $a, b, c, d, e, f$. Vi definierar en relation $\mathcal{P}$ på $\mathcal{A}$ som följer: givet två listor $l_1$, $l_2$ säger vi att $l_1 \mathcal{P} l_2$ om de tre första symboler i $l_1$ och $l_2$ är lika och i samma ordning.

   (a) Visa att $\mathcal{P}$ är en ekvivalensrelation. (1p)

   (b) Hur många listor finns i varje ekvivalensklass? (1p)

   (c) Hur många ekvivalensklasser finns det? (1p)

Answers TATA82, 22/10 2021

1) Show by Math. Ind that $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$\forall n \geq 1$

i) First, we verify the formula for $n=1$:

$$1(2)(3) = 6 = \frac{24}{4} = \frac{(1)(2)(3)(4)}{4} \quad \text{True}$$

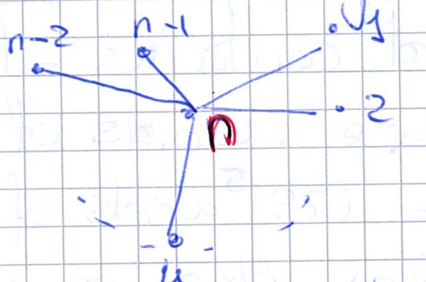
ii) Assuming $\sum_{k=1}^{n} (k)(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ for some $n \geq 1$

We show that the formula is true also for $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = (n+1)(n+2)(n+3) + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \text{← Assumpt}$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3) + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}(4+n)$$ as wanted //

2a) A tree is a connected graph with n nodes and n-1 edges




If 1, 2, ..., n-1 are leaves, all them are neighbours to n. The graph $K_{1,n-1}$

b) Let T be a tree with n nodes and n-1 edges

Then $\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2|E(T)| = \underline{2(n-1)}$

c) A forest G is a collection of trees $T_1, \ldots, T_m$

Each tree admits a bipartition $V(T_i) = A_i \cup B_i$

So the bipartition of the forest $V(G) = A \cup B$

with $A = \bigcup_{1}^{m} A_i$ and $B = \bigcup_{1}^{m} B_i$ is a good bipartition

3a) ~~Kent~~ Encryption of a number $t$: $(t^3 \bmod 13)^2 \bmod 11 = k(t)$

$k(80) = (80^3 \bmod 13)^2 \bmod 11 = (2^3 \bmod 13)^2 \bmod 11 = (8)^2 \bmod 11$

$= 64 \bmod 11 = 9 \bmod 11$

b) $a = (2)^6 (3)^5 (7)^7$ , $b = (2)^{12} (3)(5)(7)^{11} (11)^{12}$
The common positive integer divisors are the divisors of $\gcd(a,b) = (2)^6 (3)(5)$. They are

1, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 15, 8, 12, 20, 30, 16, 24, 40, 60, 32, 48, 80, 120, 64, 96, 160, 240, 192, 320, 480, 960

c) Solve the equation $12x^2 + 25x \equiv 10 \mod 11$. Eq is equivalent to $x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \mod 11$. Now
$(2)^2 + 3(2) + 1 \equiv 0 \mod 11$ and $(6)^2 + 3(6) + 1 \equiv 3 + 7 + 1 \equiv 0 \mod 11$
Solutions are $\underline{x \equiv 2}$ and $\underline{x \equiv 6}$

4) A code contains words of length 5, 6 or 7. Each codeword uses the 29 letters in the Swedish alphabet and the digits 8, 7, 3, 4, 5 and 6 such that each word contains at least a digit.
Then there are: words of length 5: $(35)^5 - (29)^5$
(since there are $(29)^5$ words of length 5 with only letters)
In the same way there are $(35)^6 - (29)^6$ words of length 6, and $(35)^7 - (29)^7$ words of length 7.
In total $\underline{(35)^5(1161) - (29)^5(871)}$ (by Addition Princ)

5) Solve $a_{n+3} - 7a_{n+2} + 14a_{n+1} - 8a_n = (2n+3)(3)^n$, $n \geq 0$
$a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 14$
The char. eq $r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$ has roots $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 4$
$a_n^{(h)} = A_1 + A_2(2)^n + A_3(4)^n$ and $a_n^{(p)} = (b_1 n + b_2)(3)^n$
Setting it in the equation yields $27(b_1(n+3) + b_2) - 63(b_1(n+2) + b_2) + 42(b_1(n+1) + b_2) - 8(b_1 n + b_2) = 2n + 3$
$\begin{cases} -2b_1 = 2, \; \underline{b_1 = -1} \\ -3b_1 - 2b_2 = 3 \; \underline{b_2 = 0} \end{cases}$
$a_n = A_1 + A_2(2)^n + A_3(4)^n - n(3)^n$

Using initial conditions
we get $A_3=2$, $A_1=A_2=0$

$$\begin{cases} 2 = A_1 + A_2 + A_3 \\ 5 = A_1 + 2A_2 + 4A_3 - 3 \\ 14 = A_1 + 4A_2 + 16A_3 - 18 \end{cases}$$

$$\boxed{a_n = 2(4)^n - n(3)^n}$$

6) In how many ways can we choose without repetition 4 numbers between 1 and 100 so that all four are odd, or all four are multiples of 3 or all four are multiples of 5.

We model $A = \{$choices of 4 odd numbers $1..100\}$

$B = \{$choices of 4 multiples of 3$\}$

$C = \{$choices of multiples of 5$\}$

As there are 50 odd number $|A| = \binom{50}{4}$

As there are 33 multiples of 3 $|B| = \binom{33}{4}$

As there are 20 multiples of 5 $|C| = \binom{20}{4}$

As there are 17 odd multiples of 3 $|A \cap B| = \binom{17}{4}$

As there are 10 odd multiples of 5 $|A \cap C| = \binom{10}{4}$

As there are 6 multiples of 15 $|B \cap C| = \binom{6}{4}$

As there are only 3 odd multiples of 15 $|A \cap B \cap C| = 0$

So, in total (using PIE)

$$\binom{50}{4} + \binom{33}{4} + \binom{20}{4} - \binom{17}{4} - \binom{10}{4} - \binom{6}{4}$$

7) Consider $\mathcal{A} = \{(x_1, --, x_{33}) ; x_i \in \{a,b,c,d,e,f\}, 1 \le i \le 33\}$

We define $\ell_1 \mathcal{S} \ell_2$ if $\ell_1 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, --)$ and $\ell_2 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, --)$

a) $\mathcal{S}$ is an equivalence relation since

i) $\forall \ell \in \mathcal{A}$ $\ell \mathcal{S} \ell$, it has the three first symbols equal

ii) $\mathcal{S}$ symmetric if the three first symbols of $\ell_2$ coincide with the three first symbols in $\ell_1$, also the three first symbols of $\ell_1$ coincide with the three first symbols of $\ell_2$

iii) $\mathcal{R}$ transitive. If the three first symbols of $l_1$ equal to the three first symbols of $l_2$, which equal to the three first symbols of $l_3$, then the three first symbols of $l_1$ equal to the first three symbols of $l_3$

b) An equivalent class is giving by fixing the three first symbols and choicing free symbols in positions 4 to 33 : $(6)^{30}$ lists in an equivalent class

c) Again an equivalent class is given by a list $(x_1, x_2, x_3)$ with $x_i \in \{a, b, c, d, e, f\}$

So there are $(6)^3$ equivalent classes