Några mängdbegrepp

Euklidiska rummet $R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x} : x_i \in R\}$, $n \geq 2$.

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{summa}$$

$$k \cdot \bar{x} = (k \cdot x_1, \ldots, k \cdot x_n) \quad \text{produkt med ett tal}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n \quad \text{skalärprodukt}$$

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \quad \text{belopp}$$

Avståndet mellan $\bar{x}$ o $\bar{y}$ definieras av

$$|\bar{x} - \bar{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Delmängder till R^n:

Cirkel i R^2 med radie $r > 0$ o centrum i $\bar{a}$

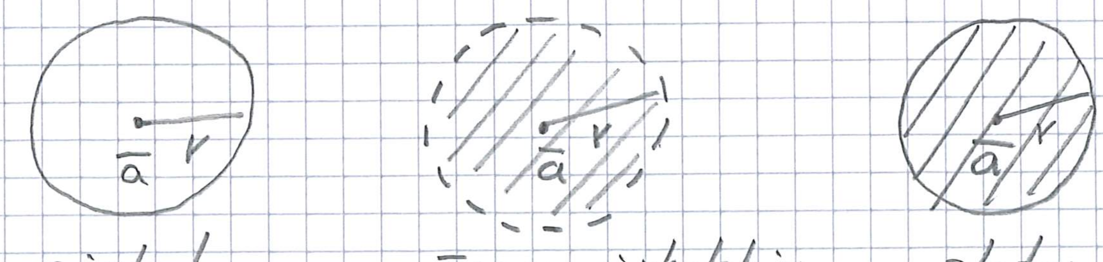
$$\{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x} - \bar{a}| = r\} \text{ eller } \{\bar{x} \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$$

Öppen (resp. **sluten**) **cirkelskiva** i R^2 med radie $r > 0$ o centrum i $\bar{a}$:

$$\{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x} - \bar{a}| < r\} \text{ eller } \{\bar{x} \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

(resp.

$$\{x \in R^2 : |\bar{x} - \bar{a}| \leq r^2\} \text{ eller } \{x \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}$$



cirkel — öppen cirkelskiva — sluten cirkelskiva

Analogt i R^n, $n \geq 3$

Sfär med radie $r>0$ o centrum i $\bar{a}$

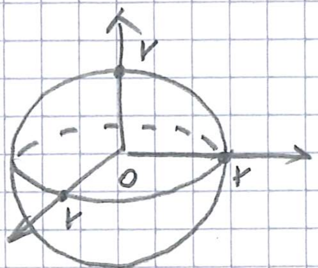
$$S(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in R^n : |\bar{x} - \bar{a}| = r\}$$

Öppet (resp. **slutet**) klot med radie $r>0$ o centrum i $\bar{a}$.

$$K(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in R^n : |\bar{x} - \bar{a}| < r\}$$

$$\left(\text{resp. } \overline{K}(\bar{a}, r) = \{x \in R^n : |\bar{x} - \bar{a}| \leq r\}\right)$$

Obs $\overline{K}(\bar{a}, r) = K(\bar{a}, r) \cup S(\bar{a}, r)$



$n=3$

Def. Låt $M \subseteq R^n$ (M är en **delmängd** till R^n)

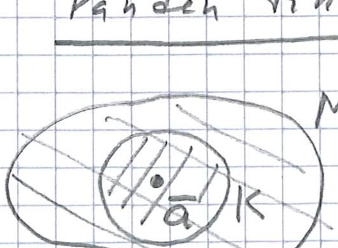
En punkt $\bar{a}$ i R^n sägs vara

(1) **en inre punkt** till M om det finns ett klot K kring $\bar{a}$ som helt ligger i M.

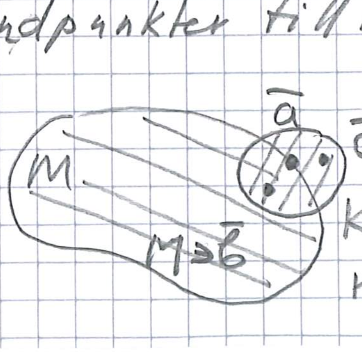
det inre till M = **alla** inre punkter till M, **Int$M$**

(2) en **randpunkt** till M om varje klot K kring $\bar{a}$ innehåller punkter såväl från M som från CM (M's kompliment) $= \{\bar{x} \in R^n : \bar{x} \notin M\}$.

randen till M = alla randpunkter till M, **BdM**



inre punkt



randpunkt

Def. En mängd M i R^n sägs vara

(1) sluten om $Bd\, M \subseteq M$

(2) öppen om $Bd\, M \cap M = \emptyset$ (den tomma mängden)

(3) begränsad om det finns ett klot K s.a. $M \subseteq K$.

(4) Kompakt om M är sluten o begränsad

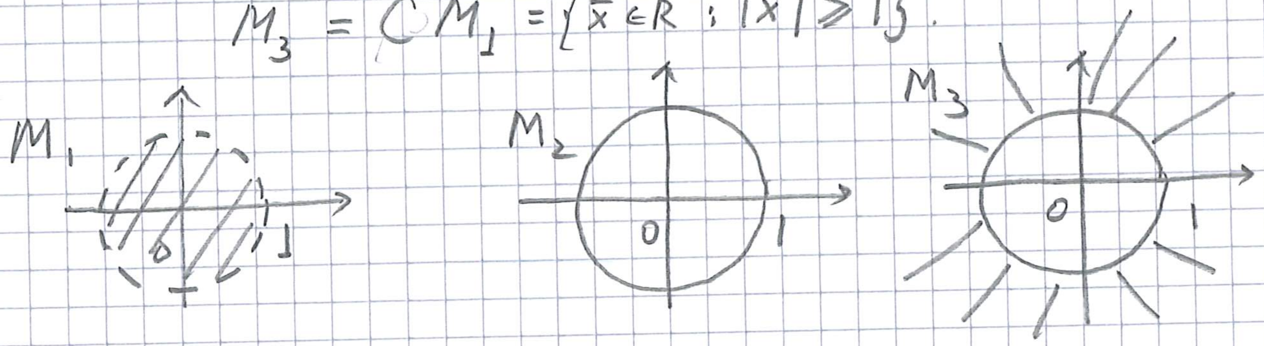
Obs $Bd\, M = Bd\, CM$,

M är sluten $\Leftrightarrow$ CM är öppen.

Ex 1. $M_1 = \{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x}| < 1\}$ (öppen cirkelskiva)

$M_2 = Bd\, M_1$ (cirkel) $= \{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x}| = 1\}$

$M_3 = CM_1 = \{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x}| \geq 1\}$.



Obs $Bd\, M_1 = Bd\, M_2 = Bd\, M_3 = M_2 \Rightarrow$

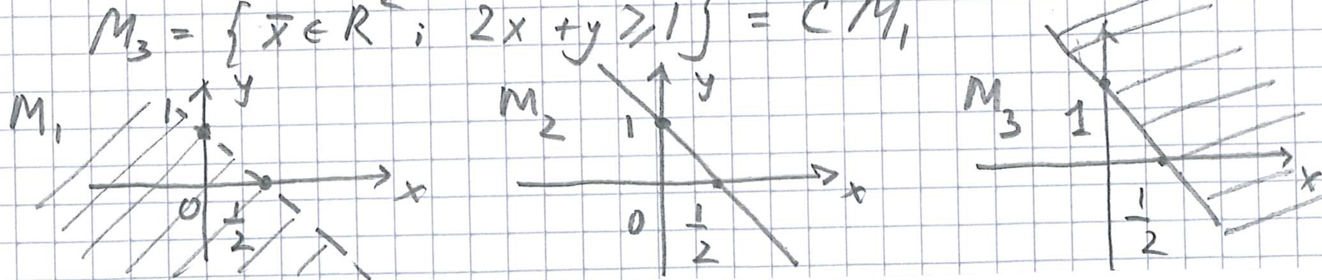
M_1 är öppen, icke-sluten, begränsad, icke-kompakt

M_2 är Kompakt, icke-öppen

M_3 är sluten, icke-öppen o obegränsad.

Ex. 2 $M_1 = \{\bar{x} \in R^2 : 2x + y < 1\}$, $M_2 = Bd\, M_1$

$M_3 = \{\bar{x} \in R^2 : 2x + y \geq 1\} = CM_1$



<u>Obs</u> $\text{Bd}\, M_1 = \text{Bd}\, M_2 = \text{Bd}\, M_3 = M_2 \Rightarrow$

M_1 är öppen, icke-sluten, obegränsad, icke-kompakt

M_2 är sluten, icke-öppen, obegränsad, icke-kompakt

M_3 är —— " ——

Funktioner av flera variabler

$f: \mathcal{D}_f \subseteq R^m \longrightarrow R^n$. Definiera som i en var analys.

$\mathcal{D}_f$ är <u>definitionsmängden</u> för f, o

$V_f = \{\bar{y} \in R^n : \bar{y} = f(\bar{x})$ för någon $\bar{x} \in R^m\}$ är <u>värdemängden</u> för f

<u>Skalära funktioner</u> $f: \mathcal{D}_f \subseteq R^m \rightarrow R$.

Några partikulära fall.

<u>Tvåvariabelfunktioner</u> $f: \mathcal{D}_f \subseteq R^2 \rightarrow R$

<u>Ett sätt</u> att åskådliggöra en funktion $f(x,y)$ är att skissera dess graf, där

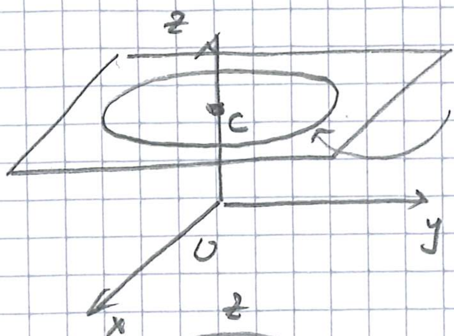
<u>grafen av f</u> $= \{(x,y,z) \in R^3 : z = f(x,y), (x,y) \in \mathcal{D}_f\}$
(<u>funktionsyta</u>)

Det kan man göra punktvis eller m h a skärningskurvor av grafen med plan $x=a$, $y=b$, $z=c$ (a,b,c konstanter)

<u>Ett annat sätt</u> är att rita dess <u>nivåkurvor</u>

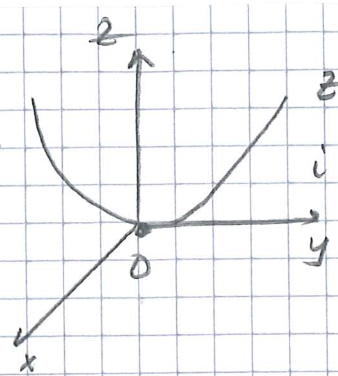
$(f(x,y) = c$, $c \in R$, i (x,y)-planet.

<u>Ex 3.</u> Låt $f(x,y) = x^2+y^2$, $\mathcal{D}_f = R^2$.

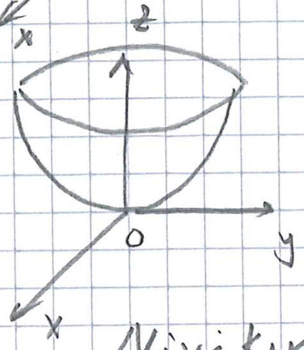


$x^2+y^2=c$
i $z=c$

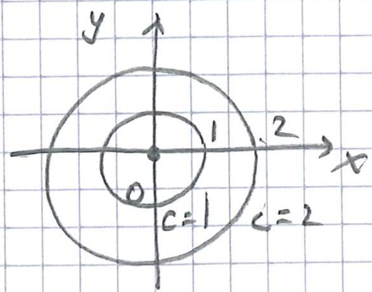
och



$z=y^2$
i $x=0$ $\Rightarrow$



grafen av $f(x,y)=x^2+y^2$ (paraboloid)



Nivåkurvor : $x^2+y^2=c,\ c\geq 0$

(cirklar med radie $\sqrt{c}$)

Ex 4. $f(x,y)=2-2x-y,\ D_f=R^2.$

Obs grafen: $z=2-2x-y$ är planet $2x+y+z=2$ i R^3

Nivåkurvor: $2-2x-y=c \Leftrightarrow y=2-2x-c$ räta linjer i R^2.

Trevariabelfunktioner $f: D_f \subseteq R^3 \to R$

Ett sätt att visualisera f är att rita dess nivåytor:

$f(x,y,z)=c,\ c\in R,$ i x,y,z-rummet.

Ex.5 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ D_f=R^3$

Nivåytor : $x^2+y^2+z^2=c,\ c\geq 0,$ sfärer med radie $\sqrt{c}$.

Ex 6 $f(x,y,z)=x+2y+3z,\ D_f=R^2$

Nivåytor: $x+2y+3z=c,\ c\in R,$ plan med normalvektor $\bar{n}=(1,2,3)$

Vektorvärda funktioner $\bar{f}: D_f \subseteq R^m \to R^n,\ n>1$

Ex 7 $\bar{f}(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y))=(x+2y,\ x\cdot y)$

är en vektorvärd funktion av typ $R^2 \to R^2$

Partikulära fall.

1. $\overline{f}(\overline{x}) = A\cdot\overline{x}$, $\overline{x} \in R^m$, $A\,(n\times m)$ matris, är
kolonnmatris

<u>linjer</u> av typ $R^m \to R^n$

2. $\overline{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(\overline{x}))$, $x \in R$, av typ $R \to R^n$ är

<u>en kurva</u>, ofta $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, t <u>parameter</u>

<u>Ex 8</u> $\overline{x}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in R$, av typ $R \to R^2$

<u>Obs</u> värdemängden är cirkeln $x^2+y^2=1$.

<u>Ex 9.</u> $\overline{x}(t) = (1+2t, 3-5t)$, $t \in R$, av typ $R \to R^2$

värdemängden är räta linjen som går genom

punkten $P(1,3)$ o har riktningsvektorn $\overline{v}(2,-5)$.