FÖ10 Optimering

Låt $f: D \in R^n \to R$, $n \geq 1$

Def. f har maximivärde i D om det finns en punkt $P_0 \in D$ s.a. $f(P) \leq f(P_0)$ $\forall P \in D$.

P_0 är maximipunkt, $f(P_0)$ är maximivärde

Analogt, minimipunkter o minimivärde

Optimeringsproblem: Sök max/min av f på D.

Repetera

Sats. Om f är kontinuerlig på D o D är kompakt så har f ett största o ett minsta värde.

Dessa kan finnas i inre punkter till D, som då måste vara lokala max/min, eller i randpunkter till D.

$\Rightarrow$ Vi kommer att studera

1. Inre punkter där $\nabla f = \bar{0}$ för att hitta alla stationära punkter (om $f \in C^1$)
2. Randen.

Ex. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $D = R^2$. Obs f är kontinuerlig o D är obegränsad (icke-kompakt).

$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ o $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = -y^2 = -\infty$ $\Rightarrow$

max/min saknas.

Ex. $f(x,y) = \begin{cases} (\sqrt{x^2+y^2})^{-1}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $(x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

Obs f är ej kontinuerlig, D är kompakt

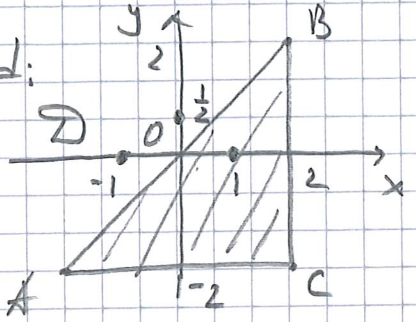
$\min_D f = 1$ (antas på cirkeln $x^2+y^2=1$, randen till D, o origo)

$\max_{\mathcal{D}} f$ existerar ej.

EX. (Optimering på en kompakt mängd).

Bestäm största o minsta värde av $f(x,y) = y^2 + (x^2-1)\cdot y$ på en sluten triangel $\mathcal{D}$ med hörn i $A(-2,-2)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$

Lsg. Rita en bild:



Obs 1) $\mathcal{D}$ är en sluten o begränsad mängd $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ är kompakt.

2) f är kontinuerlig på $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$ största / minsta värde existerar enligt satsen.

Uppsökningsschemat:

1. Inre punkter där $\nabla f = \bar{0}$ (Obs $f \in C^1$)
2. Rand: $Bd\,\mathcal{D} = AB \cup BC \cup AC$ med "hörn" A, B, C

1. Inre punkter
$$\begin{cases} f'_x = 2xy = 0 & (1) \\ f'_y = 2y + x^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $x=0$ eller $y=0$. Insättning av dessa i (2) ger

$x=0 \Downarrow y=\frac{1}{2}$ $\quad$ $y=0 \Downarrow x=\pm 1$

Vi får tre punkter $(0,\frac{1}{2})$, $(1,0)$ o $(-1,0)$. (stationära)

Obs att $(1,0)$ ligger i Int $\mathcal{D}$ o denna är kandidatpunkt med kandidatvärde $f(1,0) = \underline{0}$. Övriga punkter ligger utanför Int $\mathcal{D}$ (se bilden). Vi kastar bort dem.

2. Rand (a) AB, $y = x$ för $-2 < x < 2$ (sparar "hörnen")

$$f\Big|_{AB} = x^2 + (x^2-1)\cdot x = x^3 + x^2 - x = g(x), \quad -2 < x < 2.$$

(En-var optimering av $g(x)$) $\quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow x = -1, \frac{1}{3}$

Obs $-1, \frac{1}{3} \in (-2,2)$! $\Rightarrow$ två kandidater $(-1,-1)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

$f(-1,-1) = g(-1) = \underline{1}$, $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = g(\frac{1}{3}) = \underline{-\frac{5}{27}}$ är kandidatvärde

(b) BC, $x=2$, $y=y$, $-2<y<2$ $\Rightarrow$ $f|_{BC} = f(2,y) =$

$= y^2 + (2^2-1)\cdot y = y^2+3y = h(y)$, $-2<y<2$, optimera $h(y)$

$h'(y)=0 \Leftrightarrow 2y+3=0 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2} \in (-2,2)$! (Kontroll)

$\Rightarrow$ Kandidat $(2,-3/2) \Rightarrow f(2,-3/2) = h(-\frac{3}{2}) = \underline{-\frac{9}{4}}$ är kandidatvärde.

(c) AC, $x=x$, $y=-2$, $-2<x<2$ $\Rightarrow$ $f|_{AC} = f(x,-2) =$

$= (-2)^2 + (x^2-1)\cdot(-2) = \underbrace{-2x^2+6}_{=r(x)}$, $-2<x<2$. Optimera $r(x)$.

$r'(x)=0 \Leftrightarrow -4x=0 \Leftrightarrow x=0 \in (-2,2)$ (Kontroll!) $\Rightarrow$

Kandidat $(0,-2) \Rightarrow f(0,-2) = r(0) = \underline{6}$ är kandidatvärde.

(d) "hörn" är kandidater: $f(A) = f(-2,-2) = \underline{-2}$,

$f(B) = f(2,2) = \underline{10}$, $f(C) = f(2,-2) = \underline{-2}$ är kandidatvärde

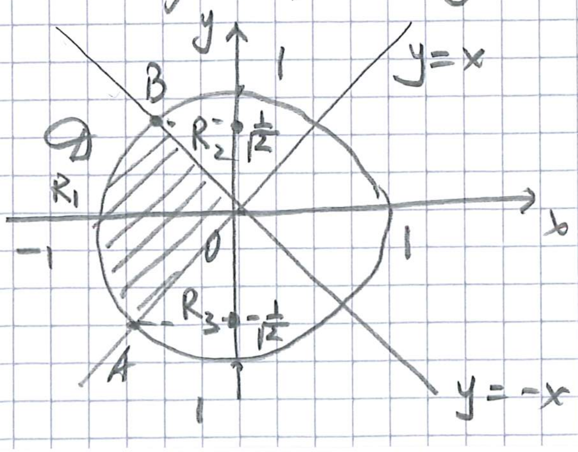
Välj max/min av funna kandidatvärde:

$0, 1, -\frac{5}{27}, -\frac{9}{4}, 6, 10, -2 \Rightarrow$

Svar: $\max_{D} f = 10$ antas i $(2,2)$ o $\min_{D} f = -\frac{9}{4}$ antas i $(2,-3/2)$.

Ex Sök max/min $f(x,y) = y\cdot x^2$ i mängden D som ges av $x^2+y^2 \le 1$, $x \le y \le -x$.

Lsg. Rita bild.



Obs 1) D är sluten o begränsad $\Rightarrow$ D är kompakt

2) f är kontinuerlig på D

$\Rightarrow$ f har största o minsta värde

1. Inre punkter: $\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 2xy = 0 & (1) \\ f'_y = x^2 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$, y är godtycklig

$\Rightarrow$ $(0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, är stationära för f

men alla ligger utanför Int D

Vi kastar bort dem. Vi fick inget kandidatvärde.

2. Rand: R_1, R_2, R_3 o "hörn" $A, 0, B$.

(a) R_1, $x = -\sqrt{1-y^2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f|_{R_1} = y \cdot (1-y^2) = y - y^3 = g(y)$,

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Optimera $g(y)$: $g'(y) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$!

$\Rightarrow$ kandidater $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$, $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{-\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ (kandidatvärde)

(b) R_2, $x = -y$, $0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f|_{R_2} = (-y)^2 \cdot y = y^3 = h(y)$, $0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Optimera $h(y)$: $h'(y) = 0 \Leftrightarrow 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ligger utanför intervallet $0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ inga kandidatvärde.

(c) R_3, $x = y$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} y < 0 \Rightarrow f|_{R_3} = y^3 = r(y)$, $0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Analogt som ovan inga kandidatvärde.

(d) "hörn" är kandidater: $f(A) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$,

$f(0) = \underline{0}$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f(B) = \underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Välj max/min av funna värden: $\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \max_D f = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ antas i $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\min_D f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ antas i $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$