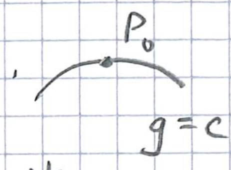
Optimering med bivillkor

2 variabler, 1 bivillkor.

Låt $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara av klass C^1.

Problem: Sök max/min av $f(x,y)$ då (x,y) uppfyller ekv $\underbrace{g(x,y)=c}_{\text{ett bivillkor}}$ (c är en konstant)

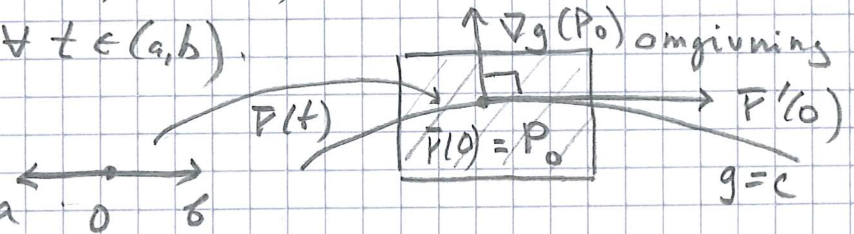
Undersökning: Betrakta en punkt P_0 s.a. $g(P_0)=c$.



Anta att $\nabla g(P_0) \neq \bar{0}$. $\Rightarrow$ det går att visa att nivåkurvan $g(x,y)=c$ kan parametriseras nära P_0 d.v.s

$\exists\ \bar{r}(t) = (x(t),y(t))$, $t \in (a,b)$, $0 \in (a,b)$, $\bar{r}(0)=P_0$ o

(#) $g(x(t),y(t)) = c \quad \forall t \in (a,b)$.



Derivera (#): $g'_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + g'_y(x(t),y(t))\cdot y'(t) = 0 \quad \forall t$

Sätt in $t=0 \Rightarrow \nabla g(P_0)\cdot \bar{r}'(0) = 0 \Rightarrow \underbrace{\nabla g(P_0) \perp \bar{r}'(0)}_{(*)}$

Anta nu att P_0 är en lokalextrempunkt för restriktionen $f\big|_{g=c} = f(x(t),y(t)) = h(t)$, $t \in (a,b)$.

Ty $0 \in (a,b)$ (inre punkt) en-var analys $\Rightarrow h'(0)=0$.

Utryck $h'(0)$:

Först, $h'(t) = f'_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f'_y(x(t),y(t))\cdot y'(t) = 0 \quad \forall t$

Sätt in $t=0 \rightarrow \nabla f(P_0)\cdot \bar{r}'(0) = 0 \Rightarrow \underbrace{\nabla f(P_0) \perp \bar{r}'(0)}_{(**)}$

Obs (*) & (**) $\Rightarrow \nabla g(P_0) \parallel \nabla f(P_0)$

(eller $\nabla g(P_0)$, $\nabla f(P_0)$ är linjärt beroende)

Även om $\nabla g(P_0)=\bar{0}$ så får vi detsamma. Sammanfatta!

Sats I en gemensam inre punkt P_0 för D_f, D_g, där $f|_{g=c}$ har ett lokalt extremvärde (bl.a. extrempunkt) gäller att $\nabla f(P_0) \parallel \nabla g(P_0)$. (eller vektorerna är lin. beroende)

EX Sök max/min av $f(x,y)=x\cdot y$ då $\underbrace{\overset{g(x,y)}{4x^2+2xy+y^2}=1}_{\text{en ellips}}$.

Obs området är kompakt o funktionen är kontinuerlig $\Rightarrow$ max/min värde finns.

Enligt satsen ovan satisfierar extrempunkter följande system: $\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är parallella } (1) \\ g=1 \quad (2) \end{cases}$

två metoder att skriva om (1):

① $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & x \\ (8x+2y) & (2x+2y) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$y(2x+2y)-(8x+2y)\cdot x=0$ eller $2(y^2-4x^2)=0$ eller $\underline{y=\pm 2x}$

Fall 1: $y=2x$ in i (2) $\Rightarrow 4x^2+4x^2+4x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$ och $y=2x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ två punkter o två värde

$f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{1}{6}}$ o $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\underline{\frac{1}{6}}$ kandidater

Fall 2: $y=-2x$ in i (2) $\Rightarrow 4x^2-4x^2+4x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

o $y=-2x=\mp 1 \Rightarrow$ två punkter o två värde

$f\left(\frac{1}{2},-1\right)=\frac{1}{2}(-1)=\underline{\frac{-1}{2}}$ o $f\left(-\frac{1}{2},1\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\underline{\frac{-1}{2}}$ kandidater

Välj max/min: $\max_{g=1} f=\frac{1}{6}$ antas i $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ o $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

$\min_{g=1} f=-\frac{1}{2}$ antas i $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ o $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

2 $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$, λ kallas Lagranges multiplikator

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \end{cases}$$

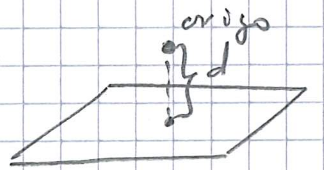
3 variabler, 1 bivillkor

Problem: Sök max/min av $f(x,y,z)$ då $\underbrace{g(x,y,z)=c}_{\text{en nivåytan.}}$

Obs Motsvarande sats gäller i fallet:

[max/min av f då $g=c$ (ett bivillkor) finns i punkter där ∇f o ∇g är parallella.

Ex Bestäm minsta avstånd från planet $2x-y+3z=7$ till origo.



$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \text{min}$$

$$\text{då } \underbrace{2x-y+3z}_{g}=7$$

eller $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \rightarrow$ min då $g=7$. Obs min finns!

Två metoder avgöra om parallella.

1 $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$ (λ är Lagranges multiplikator)

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2 \\ 2y = \lambda \cdot (-1) \\ 2z = \lambda \cdot 3 \\ g = 7 \quad (4) \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=-\frac{\lambda}{2},\ z=\frac{3\lambda}{2} \text{ sätt in i } (4)$$

$\Rightarrow 2\lambda - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 3 \cdot \frac{3\lambda}{2} = 7$ eller $7\lambda = 7$

eller $\lambda = 1 \Rightarrow x=1,\ y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \min_{g=7} f = 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{14}{4} \text{ antas i punkten } \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \min_{g=7} d = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

2) $\nabla f \times \nabla g = \bar{0} \iff \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \\ g'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

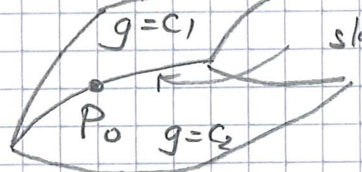
3 variabler, 2 bivillkor

Låt $f : D_f \subseteq R^3 \to R$, $g : D_g \subseteq R^3 \to R$, $h : D_h \subseteq R^3 \to R$ vara av klass C^1

Problem: Sök max/min av $f(x,y,z)$ då $\begin{cases} g(x,y,z) = c_1 \\ h(x,y,z) = c_2 \end{cases}$ (c_i är konstanter)

(två bivillkor)

Obs Bivillkoren definierar en skärningskurvan mellan två nivåytor



skärningskurvan, S

Betrakta $P_0 \in S$. Om $\nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0) \neq \bar{0}$ så kan S parametriseras nära P_0 d.v.s.

$\exists\, \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a,b)$, $0 \in (a,b)$, $\bar{r}(0) = P_0$.

På samma sätt som förut man kan visa att

$\nabla g(P_0), \nabla h(P_0) \perp \bar{r}'(0)$ (*)

Om dessutom $f|_S$ har ett lokalt extremvärde i P_0 så är $\nabla f(P_0) \perp \bar{r}'(0)$ (**)

Obs (*) & (**) $\Rightarrow \nabla f(P_0), \nabla g(P_0), \nabla h(P_0)$ är linjärt beroende

Samma gäller även om $\nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0) = \bar{0}$.

Sats: I en gemensam inre punkt P_0 för D_f, D_h, D_g där $f|_S$ har ett lokalt extremvärde (bl.a. extremvärde) gäller att $\nabla f(P_0), \nabla g(P_0), \nabla h(P_0)$ är linjärt beroende.

Ex. Sök max/min av $f(x,y,z) = 3x+2y+z$ då $\begin{cases} \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g} = 1 \\ \underbrace{x+y+z}_{h} = 1 \end{cases}$

Obs $S: \begin{cases} g=1 & \text{(en sfär)} \\ h=1 & \text{(ett plan)} \end{cases}$ är en cirkel (Kompakt)

o f är kontinuerlig $\Rightarrow f|_S$ har max o min

Enligt satsen satisfierar extrempunkter systemet:

$$(*) \begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla h \text{ är lin. beroende} & (1) \\ g = 1 & (2) \\ h = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eller} \quad \underline{-2x+4y-2z=0}$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y-2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} + \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$\ldots \Rightarrow$ två punkter $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\Rightarrow f(A) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \max_S f, \quad f(B) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \min_S f$$

Obs max/min $f(x_1,\ldots,x_n)$ då $\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) = c_1 \\ g_k(x_1,\ldots,x_n) = c_k \end{cases}$ (k bivillkor)

finns i punkter där $\nabla f, \nabla g_1, \ldots, \nabla g_k$ är lin. beroende.