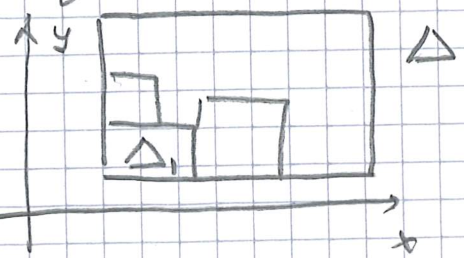
Fö12 Dubbelintegraler

Definition. Låt $f: \mathcal{D} \subseteq R^2 \to R$

Steg 1 Anta $\mathcal{D} = \Delta$ axelparallell rektangel.



Dela in i smårektanglar $\Delta_1, \dots, \Delta_N$. Välj tal m_i o M_i s.a. $m_i \le f(x,y) \le M_i \quad \forall (x,y) \in \Delta_i$

Låt A_i vara arean av Δ_i.

Inför $\sigma = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot A_i$ (undersumma)

$\Sigma = \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot A_i$ (översumma)

Obs $\sigma < \Sigma$ (alltid) $\quad$ σ (alla) $\; I \;$ Σ (alla)

Om man genom att göra indelningen tillräckligt fin (N stor) kan få $\Sigma - \sigma < \varepsilon$ för godtyckligt $\varepsilon > 0$ så finns det entydigt tal I med $\sigma \le I \le \Sigma$ för alla under- o översummor.

I fallet kallas f integrerbar på $\mathcal{D}$ o

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{(dubbelintegral)}$$

Ex. $\mathcal{D} = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ o $f: \mathcal{D} \to R$ s.a.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{om } x, y \text{ är rationella tal} \\ 1, & \text{annars} \end{cases}$$

Notera att $m_i \le 0$ o $M_i \ge 1$ alltid $\Rightarrow \sigma \le 0$, $\Sigma \ge 1$ o $\Sigma - \sigma \ge 1$ alltid. $\Rightarrow f$ är icke-integrerbar på $\mathcal{D}$.

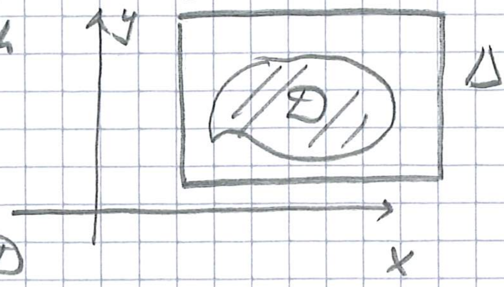
Obs Man kan visa att I existerar om f är kontinuerlig på Δ, men också om f är diskontinuerlig t.ex. på en kurva.

Steg 2. D är en kompakt mängd i xy-planet

Välj Δ som innehåller D, och

Inför $f_\Delta : \Delta \subseteq R^2 \to R$

$$f_\Delta(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \in \Delta - D \end{cases}$$

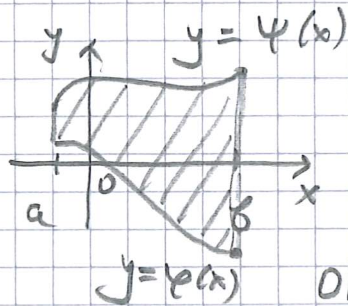


Obs f_Δ kan vara diskontinuerlig på randen till D

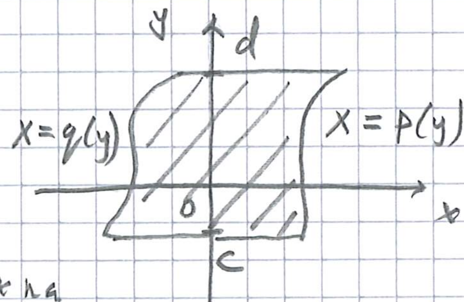
Definiera $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f_\Delta(x,y)\,dx\,dy$ (dubbelintegral av f över D)

Sats (existens). Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på D av typen $D = \{a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ eller $D = \{q(y) \le x \le p(y), c \le y \le d\}$, där a, b, c, d konstanter o φ, ψ, q, p är kontinuerliga funktioner så existerar $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Typ 1:



Typ 2:



Obs Båda randerna är kurvor

Egenskaper:

① $\iint_D (\lambda \cdot f + \mu g)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f\,dx\,dy + \mu \iint_D g\,dx\,dy$

② $\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} g\,dx\,dy$ om $\mathrm{Int}(D_1 \cap D_2) = \emptyset$

Hur beräknar man dubbelintegraler?

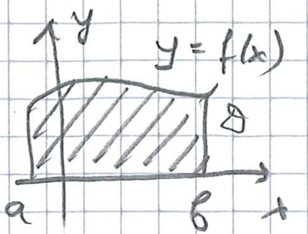
Upprepad integration:

Typ 1 **Typ 2**

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{q(y)}^{p(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

En motivering $(f \geq 0)$

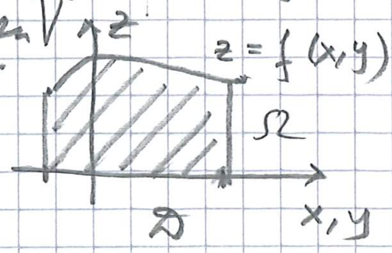
I en-var, $\int_a^b f(x)\,dx$, där $f \geq 0$, är arean



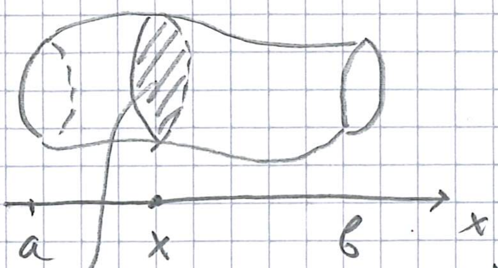
I fler-var, $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, där $f \geq 0$, är volymen V

av Ω som ligger mellan ytan $z = f(x,y)$

o D i x,y-planet.



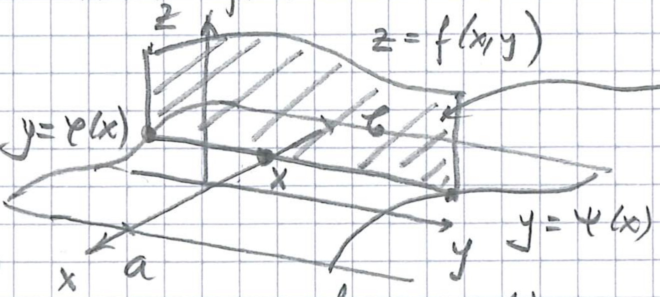
Repetera också skivformeln för volym i en-var:



$$\text{Volym} = \int_a^b A(x)\,dx \qquad (*)$$

tvärsnittsarean $A(x)$.

Åter fler-var.



$$A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \qquad (**)$$

$$\begin{matrix}(*)\\(**)\end{matrix} \Rightarrow V = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \left(\text{upprepad integral av typ 1.} \right)$$

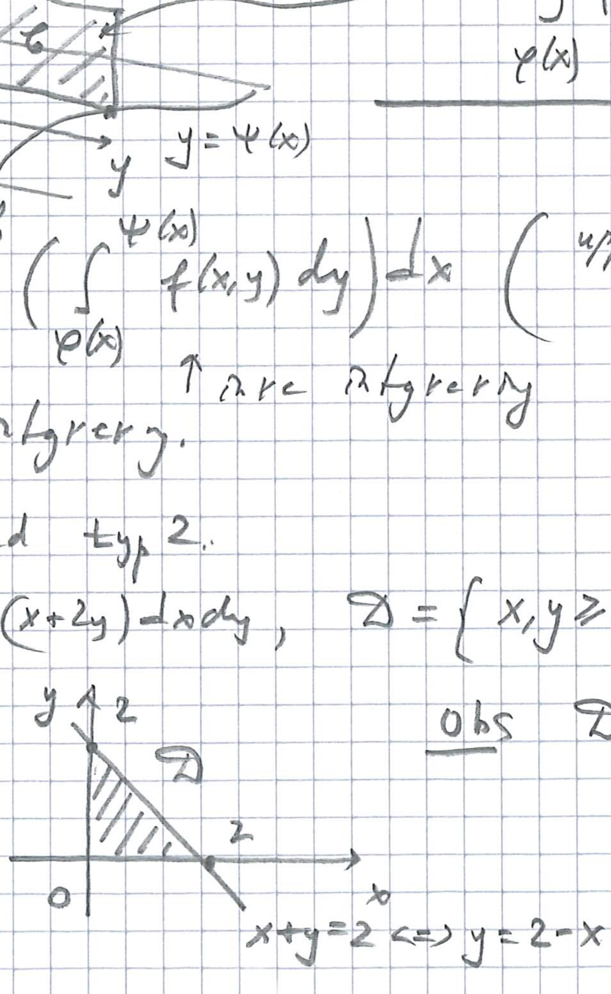
$\uparrow$ inre integrering

$\uparrow$ yttre integrering.

Analogt med typ 2.

EX. $I = \iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, $D = \{ x, y \geq 0 \text{ o } x+y \leq 2 \}$.

Lsg Bild



Obs $D = \{ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2-x \}$

Upprepad integration:

$$I=\int_0^2\left(\int_0^{2-x}(x+2y)\,dy\right)dx=\int_0^2\left[xy+y^2\right]_0^{2-x}dx=$$

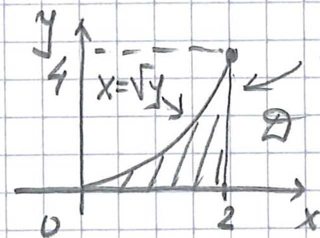
$$\int_0^2\left(\left(x(2-x)+(2-x)^2\right)-\left(x\cdot 0+0^2\right)\right)dx=\int_0^2(4-2x)\,dx=$$

$$\left[4x-x^2\right]_0^2=\left(4\cdot 2-2^2\right)-0=\underline{4}$$

<u>Ex</u>. $f(x,y)=x\cdot y^3$. Vad är volymen V mellan ytan $z=xy^2$ o xy-planet ovanför $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$.

<u>Lsg</u>

Bild



<u>Obs</u> $\underline{V=\int_0^2\left(\int_0^{x^2}xy^3\,dy\right)dx}$ (typ 1)

$(xy^3\ge 0$ på $D)$ eller $\underline{V=\int_0^4\left(\int_{\sqrt{y}}^{2}xy^3\,dx\right)dy}$ (typ 2)

Låt använda andra formeln

$$V=\int_0^4\left[\frac{x^2}{2}\cdot y^3\right]_{\sqrt{y}}^{2}dy=\int_0^4\left[2y^3-\frac{y^4}{2}\right]dy=$$

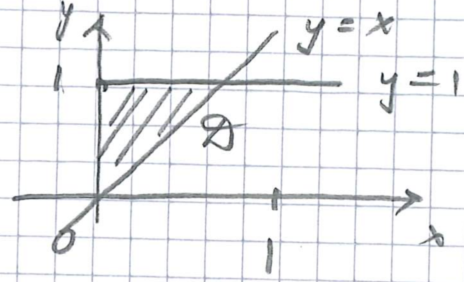
$$=\left[\frac{y^4}{2}-\frac{y^5}{10}\right]_0^4=\frac{1}{2}4^4-\frac{4^5}{10}=\frac{2^8}{2}-\frac{2^{10}}{10}=128-\frac{512}{5}=\underline{\frac{128}{5}}$$

<u>Ex</u>. $I=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}\,dy\right)dx$

<u>Obs</u> det inte går att skriva <u>en primitiv</u> till e^{-y^2} i enkla funktioner. $\Rightarrow$ Vi kan inte ta den <u>inre</u> integralen.

Vad ska man göra? Ändra ordning i integrering. (<u>omkastning</u> av variabler).

Lsg. Bild



$\Rightarrow I = \iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy$

Obs $D = \{0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\} \Rightarrow$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{-y^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 e^{-y^2} \left(\int_0^y 1\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot [x]_0^y \,dy = \int_0^1 y\,e^{-y^2}\,dy = \left| \begin{array}{l} \text{Variabelbyte} \\ t = -y^2;\ dt = -2y\,dy \end{array} \right|$$

$\Rightarrow y\,dy = -\frac{1}{2}dt$

$$= \int_{y=0}^{y=1} e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^0\right] = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right) > 0 \quad (\text{Obs})$$