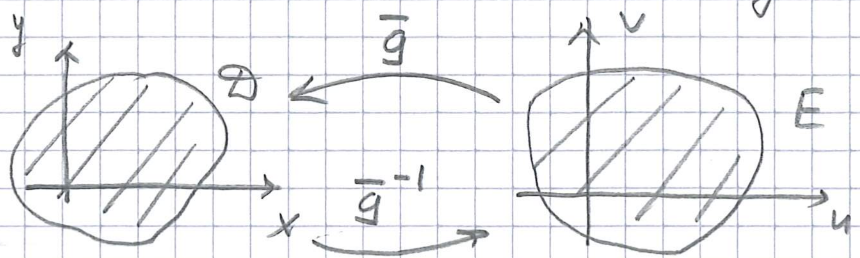
Variabelbyte i dubbelintegraler

Sats Låt $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ o $\bar g(u,v): E\subset R^2_{uv}\to D\subset R^2_{xy}$ vara ett variabelbyte (en injektiv funktion $\bar g(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ s.a. $\bar g(E)=D$). Då gäller att

$$(*)\quad I=\iint_E \underbrace{f(x(u,v),y(u,v))}_{f(\bar g(u,v))}\cdot\left|\frac{d(xy)}{d(uv)}\right| dudv$$

← absolutbelopp av funktionaldeterminanten



Obs

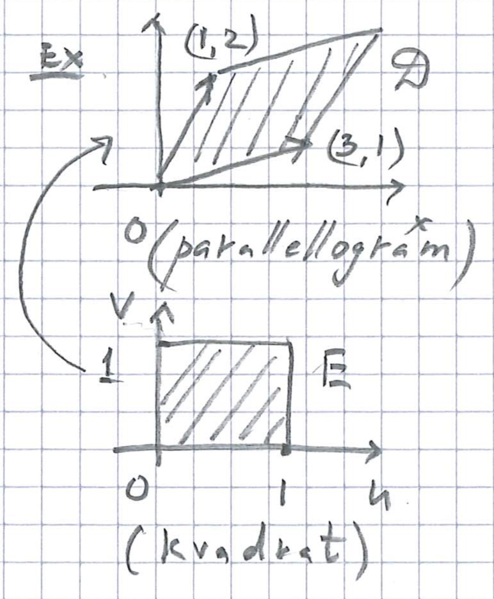
$\bar g^{-1}(D)=E$ o

$$\boxed{\frac{d(xy)}{d(uv)}=\frac{1}{\frac{d(uv)}{d(xy)}}}$$

Två syften att göra variabelbyte:

1. Området E är enklare än området D
2. $f(\bar g(u,v))$ är enklare än $f(x,y)$

Ex



$\iint_D 1\,dxdy$ = arean av $D=\left|\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\right|=|-5|=\underline{5}$

Använd subst. $\bar g$: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

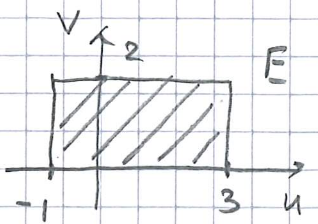
Obs $\bar g(1,0)=(1,2)$, $\bar g(0,1)=(3,1)\Rightarrow$
$\bar g(E)=D$.

$\frac{d(xy)}{d(uv)}=\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=-5.$

Obs $\iint_E 1\,dudv$ = arean av $E=\underline{1}$. För att $(*)$ skulle fungera behöver man $\left|\frac{dxy}{duv}\right|\Rightarrow \iint_D 1\,dxdy=\iint_E 1\cdot\underbrace{\left|\frac{dxy}{d(uv)}\right|}_{=5}dudv$

Ex $I = \iint_D (3x^2 + xy)\,dx\,dy$, $D = \{-1 \le 3x + y \le 3,\ 0 \le 2x - y \le 2\}$.
(parallellogram)

Använd subst. $\underbrace{\begin{cases} u = 3x + y \\ v = 2x - y \end{cases}}_{g^{-1}(x,y)}$. Obs $E = \{-1 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2\}$ (rektangel)



$$\frac{d(u\,v)}{d(x\,y)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5. \quad \text{Obs } \frac{d(x\,y)}{d(u\,v)} = \frac{1}{\frac{d(u\,v)}{d(x,y)}} = -\frac{1}{5}$$

$$f(x,y) = 3x^2 + xy = \overset{?}{\underset{''}{x}} \cdot (\underset{''}{3x + y}^{\,u}). \quad \text{Ur subst.} \Rightarrow \frac{u+v}{5} = x$$

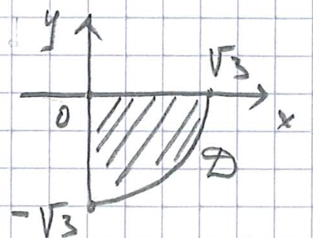
$$\Rightarrow f(x(u,v), y(u,v)) = \left(\frac{u+v}{5}\right) \cdot u \quad \Rightarrow$$

$$I = \iint_E \frac{(u+v)\cdot u}{5} \cdot \left|-\frac{1}{5}\right| du\,dv = \frac{1}{25} \iint_E (u^2 + uv)\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{25} \int_{-1}^{3} \left(\int_0^2 (u^2 + uv)\,dv \right) du = \frac{1}{25} \int_{-1}^{3} \left[u^2 v + \frac{u v^2}{2} \right]_0^2 du = \frac{16}{15}$$

Ex $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{1 + x^2 + y^2}$, $D = \{x^2 + y^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$

Bild



(sektor)

Använd polära koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{Obs } x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \frac{d(x\,y)}{d(\rho\,\varphi)} = \rho$$

$$\Rightarrow E = \{0 \le \rho \le \sqrt{3},\ -\tfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0\} \quad \text{Obs konstanta gränser}$$

$$\Rightarrow I = \iint_E \frac{1}{1+\rho^2} \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = 1 + \rho^2 \\ dt = 2\rho\,d\rho \end{matrix},\ \rho\,d\rho = \frac{dt}{2} \right| = \int_{-\pi/2}^{0} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}} \frac{dt}{2t} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{0} \Big[\ln|t| \Big]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{0} \Big[\ln(1+\rho^2) \Big]_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{1}{2} \ln 4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \pi \ln 2$$

Generaliserade integraler

Df. $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är generaliserad om D är obegränsad eller f är obegränsad i D.

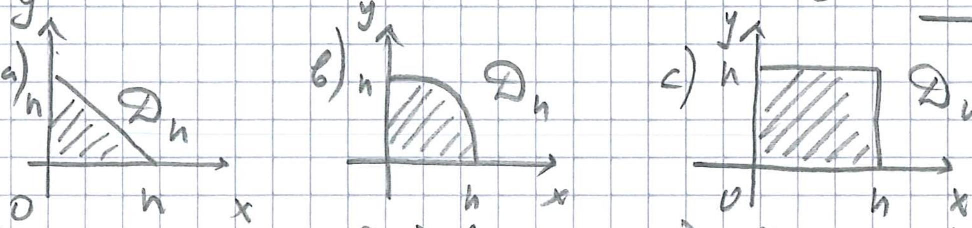
Ex. $\iint_{R^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ eller $\iint_{\left\{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x>0,\, y>0}\right\}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,dx\,dy$.

Vad blir I?

I en var, till ex, $\int_0^\infty f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\,dx$ (om gränsvärdet finns)

Fler var: Ta begränsade mängder $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$ s.a. $\forall (x,y) \in D \ \exists n : (x,y) \in D_n$. (uttömmande följd), $D_n \nearrow D$

Ex. $D = \{x, y \ge 0\}$ a) b) c)



(triangel) ($x^2+y^2 \le h$, $x, y \ge 0$) (kvadrat)

Antag också att f är begränsad på varje D_n så att $I_n = \iint_{D_n} f\,dx\,dy$ inte är generaliserad (ändligt!)

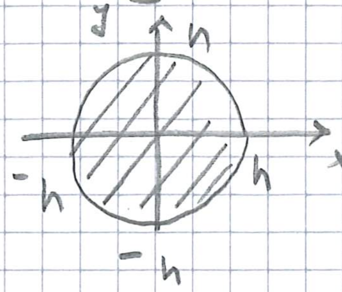
Def. $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ om gränsvärden existerar o är lika för alla $\{D_n\} \nearrow D$.

I fallet kallas I konvergent annars divergent

Det verkar komplicerad. Men om $f(x,y) \ge 0$ i D eller $D(x,y) \le 0$ i D utan att växla tecken kan man bevisa: 1) gränsvärdet är oberoende av valet $D_n \nearrow D$
2) I kan beräknas med upprepade integraler (enkla)
3) variabelbyten är tillåtna på vanligt sätt.

Ex $I = \iint_{R^2} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$. Obs $\underbrace{f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \geq 0 \text{ i } R^2}_{\text{måste kommenteras}}$

Välj $D_n \uparrow R^2$ (enklaste!)



$D_n = \{x^2+y^2 \leq n^2\}$. Obs $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \leq 1$ (begränsad) på $D_n \ \forall n$

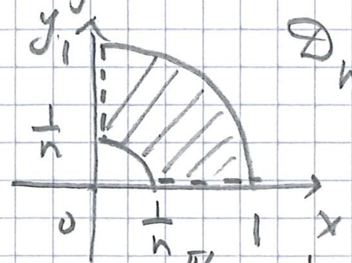
$\Rightarrow I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy =$

$= \left| \begin{matrix} \text{polära} \\ \text{koordinater} \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n \frac{1}{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1+\rho^2) \Big|_0^n d\varphi$

$= \pi \cdot \ln(1+n^2)$. Obs $I = \lim_n I_n = \lim_{n\to\infty} \pi \ln(1+n^2) = \infty \Rightarrow$

I är divergent.

Ex. $I = \iint_{D=\left\{\begin{matrix} x^2+y^2 \leq 1 \\ x,y > 0 \end{matrix}\right\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ Obs $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$ i D



$D_n = \left\{\frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1,\ x,y > 0\right\}$

Välj $D_n \nearrow D$.

Obs $f(x,y)$ är begränsad på D_n.

$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{\rho} \cdot \rho\,d\rho \right) d\varphi =$

$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

Man kan också skriva direkt (ty $f \geq 0$)

$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$

Obs Om $f(x,y)$ växlar tecken så definieras

$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ så här:

1) Dela upp $D = D_+ \cup D_-$, $f \geq 0$ på D_+ o $f \leq 0$ på D_-.

2) Räkna $\iint_{D_+} f\,dxdy$ o $\iint_{D_-} f\,dxdy$.

Båda delarna måste vara konvergenta för att I ska vara konvergent.

En rolig tillämpning

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 \overset{\text{Obs}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx = \left|\ \text{Obs } \underbrace{e^{-x^2-y^2} > 0 \text{ på } R^2}\ \right|$$

$$= \iint_R e^{-x^2-y^2}dxdy = \left|\begin{matrix}\text{polära}\\ \text{koordinater}\end{matrix}\right| = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \underline{\underline{\pi}} \Rightarrow \underline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

(används i sannolikhetslära bl.a.)