Fö 14 Trippelintegraler

Definitionen av trippelintegraler $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ sker i analogi med dubbelintegraler (under- o översummor, etc). Vid beräkning använder man upprepade enkelintegraler.

Några tolkningar!

1. $\iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$ är volymen av Ω.

Obs. $\int_a^b 1\,dx$ längden av $[a,b]$

$\iint_D 1\,dx\,dy$ arean av D

2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, där $f \geq 0$ på Ω,

Kan tolkas som massan av kroppen Ω med densitet $f(x,y,z)$.

(

$$f(P) = \lim_{\operatorname{diam}\Omega_P \to 0} \frac{\text{massan av } \Omega_P}{\text{volymen av } \Omega_P}$$

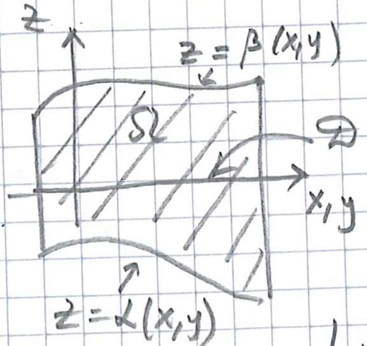
)

där diam A = diameter av den minsta sfären som kan omsluta A.

Itererad integration

(1) Ω är instängd mellan två ytor.

Ex. $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \text{ o } \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$



$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

Integrerings ordning: $z \longrightarrow x,y$.

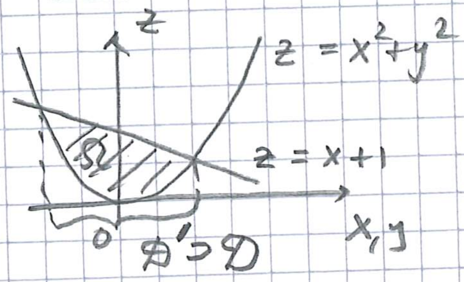
Likadant: $y \longrightarrow x,z$ o $x \longrightarrow y,z$

(2)

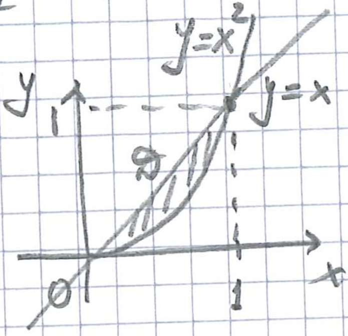
Ex Finn volymen V av kroppen Ω som ligger mellan ytorna $z = x+1$ o $z = x^2+y^2$ definierade på området $\mathcal{D} = \{0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$ i xy-planet.

Lsg. Obs $x+1 \geq x^2+y^2 \ \forall (x,y) \in \mathcal{D}$. o $V = \iiint_\Omega 1\, dx\,dy\,dz$

Bild.



$$\Rightarrow V = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{x^2+y^2}^{x+1} 1\, dz \right) dx\,dy =$$



$$= \iint_{\mathcal{D}} \left((x+1) - (x^2+y^2) \right) dx\,dy = \quad \text{Obs Bild}$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left((x+1-x^2) - y^2 \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(x+1-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\left((x+1-x^2) \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) - \left((x+1-x^2) \cdot x^2 - \frac{x^6}{3} \right) \right) dx$$

$$= \frac{201}{1260}; \quad \text{Obs } \mathcal{D}' = \left\{ (x,y) : \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \tfrac{5}{4} \right\}$$

(2) om $\Omega = \{(x,y,z) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$

så är $\iiint_\Omega f\, dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$

Integrerings ordning: $\underset{\text{först}}{z} \to \underset{\text{mitt}}{y} \to \underset{\text{sist}}{x}$

Likadant för övriga fem ordningar: $z \to x \to y$, $x \to y \to z$ etc.

Ex $I = \iiint_\Omega z\, dx\,dy\,dz$, $\Omega = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1,\ 0 \le z \le (y-x)^2\}$

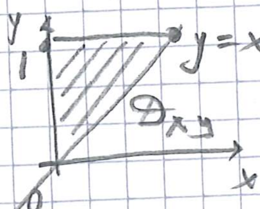
$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_0^{(y-x)^2} z\, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{(y-x)^2} dy \right) dx =$$

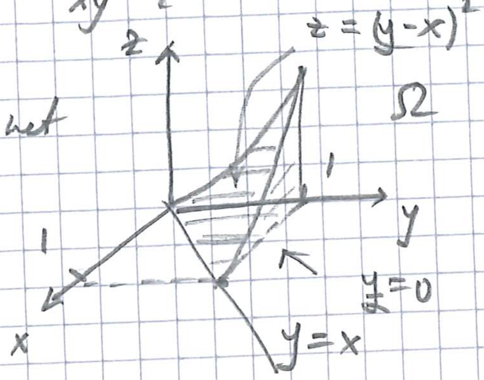
$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{(y-x)^4}{2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{(y-x)^5}{10} \right]_x^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^5}{10} - 0 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{(x-1)^6}{60} \right]_0^1 = 0 + \frac{1}{60} = \underline{\frac{1}{60}}$$

<u>Obs</u> $I = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{(y-x)^2} z\, dz \right) dx\,dy$, där $D_{xy} = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$

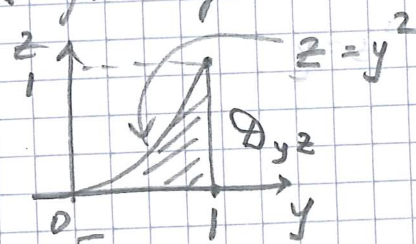
D_{xy} är <u>projektionen</u> av Ω på x,y-planet





Om man väljer ordning $z \to x \to y$ så får man $\Omega = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y,\ 0 \le z \le (y-x)^2\}$ o respekterad upprepade integral $\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{(y-x)^2} z\, dz \right) dx \right) dy$.

Om man väljer ordning $x \to z \to y$ så finn först <u>projektionen</u> D_{yz} av Ω på y,z-planet:



Gränserna för x: <u>obs</u> $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$ o
$0 \le z \le (y-x)^2$, $\sqrt{z} \le y - x \iff x \le y - \sqrt{z}$

$\Rightarrow \underline{0 \le x \le y - \sqrt{z}} \Rightarrow I = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \left(\int_0^{y-\sqrt{z}} z\, dx \right) dz \right) dy$

Man kan även följa ordning $\underset{\text{först}}{x, z} \to \underset{\text{sist.}}{y}$ då Ω skivas upp.

Projecera Ω på y-axeln $\Rightarrow 0 \le y \le 1$. Vid fixerat värde på y får man $\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le z \le (y-x)^2 \end{cases}$ $\tilde{D}_{xz}$

(projektionen av skivan på x,z-planet)

$$\Rightarrow I = \int_0^4 \left(\iint_{\tilde{D}_{xz}} z \, dx dz \right) dy$$

Variabelbyte.

Analogt med dubbelintegraler

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Sigma f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left| \frac{d(x\,y\,z)}{d(u\,v\,w)} \right| du\,dv\,dw$$

Ex. Finn massan av kroppen $\Omega = \{ 0 \le x+y+z \le 4, \ -1 \le 2x+y+2z \le 5, \ -2 \le -x+y+z \le 3 \}$

med densitet $d(x,y,z) = (2x+y+2z)^2$

Lsg. Inför variabelbyte: $u = x+y+z$, $v = 2x+y+2z$, $w = -x+y+z$.

Obs 1. $\Sigma = \{ 0 \le u \le 4, \ -1 \le v \le 5, \ -2 \le w \le 3 \}$.

2. $d(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = v^2$

3. $\dfrac{d(x\,y\,z)}{d(u\,v\,w)} = \dfrac{1}{\dfrac{d(u\,v\,w)}{d(x\,y\,z)}}$ o $\dfrac{d(u\,v\,w)}{d(x\,y\,z)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \left[\text{utveckl. efter 1:a raden} \right] = 1 \cdot (1-2) - 1 \cdot (2+2) + 1 \cdot (2+1) =$

$= -1 - 4 + 3 = -2$

$$\Rightarrow \left| \frac{d(x\,y\,z)}{d(u\,v\,w)} \right| = \frac{1}{2}$$

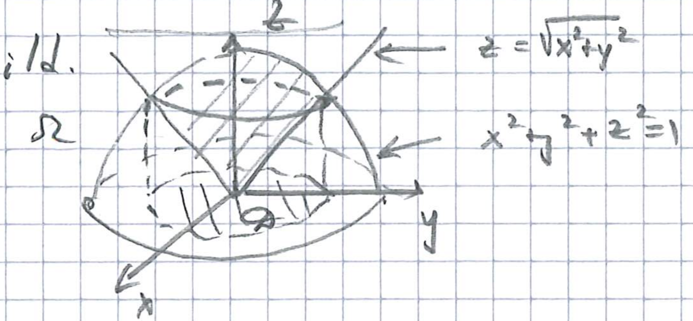
$$\Rightarrow M = \iiint_\Omega d \, dxdydz = \iiint_\Sigma v^2 \cdot \frac{1}{2} \, du\,dv\,dw = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\int_{-1}^5 \left(\int_{-2}^3 v^2 dw \right) dv \right) du$$

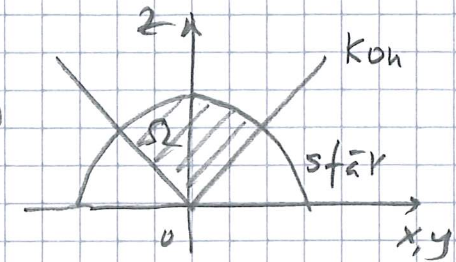
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{v^3}{3} \Big|_{-1}^{5} = \frac{10}{3} \cdot (125+1) = \underline{420}$$

Ex Beräkna $I = \iiint_\Omega z^2 \, dxdydz$, Ω ligger inom

klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ o ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Lsg. Bild.





Använd sfäriska koordinater:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Obs $\Sigma = \left\{ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi/4 \right\}$

$$\left|\frac{d(x\,y\,z)}{d(r\,\theta\,\varphi)}\right| = r^2\sin\theta \Rightarrow I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{\pi/4}\left(r^2\cos^2\theta\right)\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\right)dr\right)d\varphi$$

$$= 2\pi\cdot\underbrace{\int_0^1 r^4\,dr}_{\frac{1}{5}}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta}_{= J} = ?$$

$$J = \left[\begin{array}{l} t=\cos\theta \\ dt = -\sin\theta\,d\theta \end{array},\ \sin\theta\,d\theta = -dt\right] = -\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} t^2\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow I = \underline{\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$$

Obs $I = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\right)dx\,dy,$

där $D = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\right\}$