Fö 2 Gränsvärden o Kontinuitet

Analogt med en-variabel analys

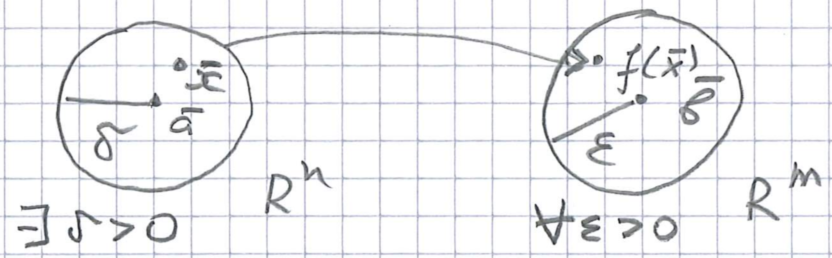
def. $f: D_f \subseteq R^n \to R^m$ har gränsvärdet $\bar{b} \in R^m$

då $\bar{x} \to \bar{a} \in R^n$ om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a.

$$|f(\bar{x}) - \bar{b}| < \varepsilon \quad \text{om} \quad 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta, \quad \bar{x} \in D_f.$$

Beteckning: $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ eller $f(\bar{x}) \to \bar{b}$ då $\bar{x} \to \bar{a}$.

Geometri:



($\forall$ = för alla, $\exists$ = det finns)

Om $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$

så är $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \iff \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_i(\bar{x}) = b_i \ \forall i \leq m$

Ex. $\bar{f}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, t+1\right)$, $R \to R^2$

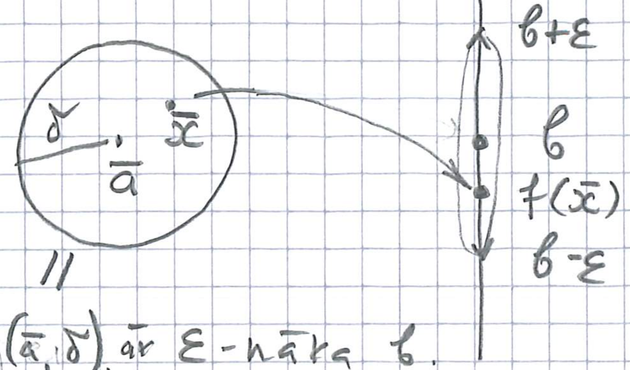
Så är $\lim_{t \to 0} f(t) = (1, 1)$.

Vi kommer bara ha skalärvärda funktioner av två eller tre variabler d v s

$m = 1$ o $n = 2$ eller $n = 3$.

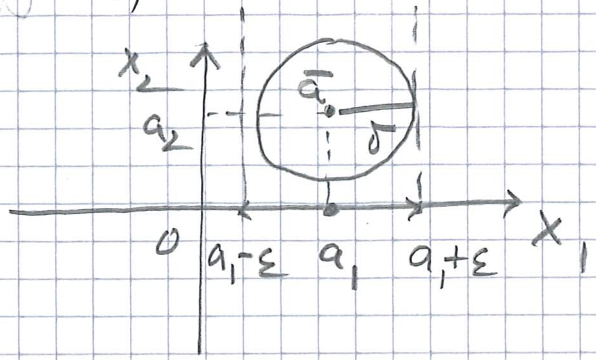
$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2) \\ \parallel \qquad\quad \parallel \\ \bar{x} \qquad\quad \bar{a}}} f(x_1,x_2) = b$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.a

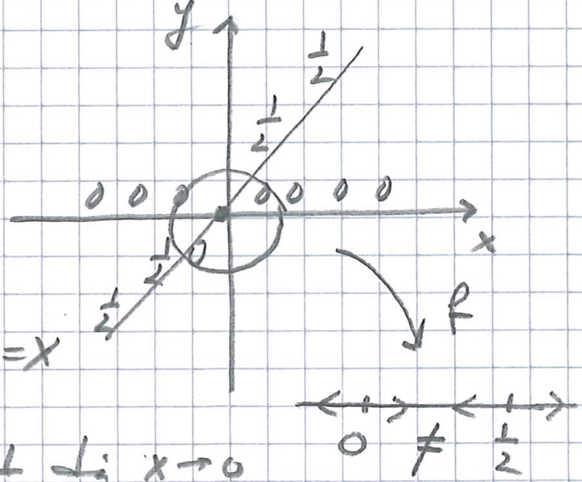


Värdena $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in K(\bar{a},\delta)$, är ε-nära b.

<u>Ex.</u> $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} x_1 = a_1$



<u>Ex.</u> $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{f(x,y)}{\overset{\parallel}{\frac{xy}{x^2+y^2}}}$, ej def i $(0,0)$



Gå mot $(0,0)$ längs x-axeln (där $y=0$)

$f(x,y) = f(x,0) = 0 \to \underline{0}$ då $x \to 0$

Gå mot $(0,0)$ längs linjen $y=x$

$f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \to \underline{\dfrac{1}{2}}$ då $x \to 0$

<u>Obs</u> $\frac{1}{2} \neq 0$, värdena kan antas inom varje liten cirkel kring $(0,0)$, oavsett radie och kan inte ligga godtyckligt nära samma värde.

$\Rightarrow$ gränsvärde saknas.

Vanliga räkneregler från en-variabel analys angående gränsvärden (summa, produkt, kvot, instängning, etc) gäller även i flervariabel analys bl.a.

1) $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})\cdot g(\bar{x}) = 0$ om $f(\bar{x})\to 0$ o $g(\bar{x})$ är begränsad.

2) sammansättningsregeln:
Om $f(\bar{x})\to\bar{b}$ då $\bar{x}\to\bar{a}$ o $g(\bar{y})\to\underline{\underline{\bar{c}}}$ då $\bar{y}\to\bar{b}$
så är $g(f(\bar{x}))\to\underline{\underline{\bar{c}}}$ då $\bar{x}\to\bar{a}$

Ex. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy+1}{x^2+y}$ = | stoppa in $x=1,\ y=2$ i utrycket |

$= \frac{1\cdot 2+1}{1^2+2} = \underline{\underline{1}}$

Ex $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2\cdot(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2} = G$ Obs $\left(\frac{0}{0}\right)$

Variabelbyte $x-1=u,\ y+1=v$, Obs $(u,v)\to(0,0)$ då $(x,y)\to(1,-1)$

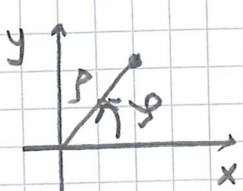
Enligt sammansättningsregeln

$G = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2\cdot v}{u^2+v^2}$ (sätt $f(x,y)=(x-1,y+1)$, $g(u,v)=\frac{u^2\cdot v}{u^2+v^2}$ o notera att $g(f(x,y)) = \frac{(x-1)^2\cdot(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}$)

Obs $\frac{u^2\cdot v}{u^2+v^2} = \underbrace{\frac{u^2}{u^2+v^2}}_{\substack{\le 1 \\ \text{(begränsad)}}} \cdot \underbrace{v}_{\to 0}$ då är $\underline{G=0}$.

Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller kurvor ger olika värden så saknas gränsvärde.
- Obs test kan ej visa att gränsvärde finns (testen ger kandidater till gränsvärde), andra metoder behövs, se satsen.



Även polära koordinater kan användas.

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

Obs $(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$

om $|f(x,y) - A| \le \psi(\rho) \to 0$ då $\rho \to 0$

så är $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$.

Ex. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = ?$ Obs 1) $A = 0$ är kandidat till grän. (testa y-axeln)

2) $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\rho^3}{\rho^2} = \rho = \psi(\rho) \to 0$ då $\rho \to 0$

$\Rightarrow$ gränsv. $= 0$.

3 variabler

Ex. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = ?$

Börja med test (säg kolla y-axeln)

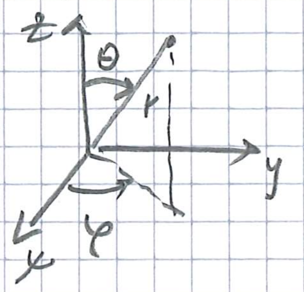
$f(x,y,z)\Big|_{y\text{-axeln}} = f(0,y,0) = 0 \Rightarrow$ om gränsv. finns så är detta $\underline{0}$

$$0 \le |f(x,y,z) - \underset{\text{möjligt gränsvärde}}{0}| \le \frac{|x|\cdot|y|\cdot|z|}{x^2+y^2+z^2} \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0$$

(instängning)

$\Rightarrow$ Gränsvärdet $= 0$.

Sfäriska koordinater:



$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

Obs $(x,y,z) \to (0,0,0) \iff r \to 0$ (utan krav på φ, θ).

Förra ex. igen

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \sin^2\theta\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta}{r^2 + r^2\cos^2\theta} =$$

$$\lim_{r\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{r} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{1+\cos^2\theta}}_{\text{begränsad}} = 0$$

Def. $f: R^n \to R^m$ är kontinuerlig i $\bar{a} \in D_f$

om $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

Ex. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$ är kontinuerlig i $(0,0)$

ty $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ (och även på hela R^2)

Sats Varje kontinuerlig funktion på en kompakt mängd M antar största o minsta värde på M