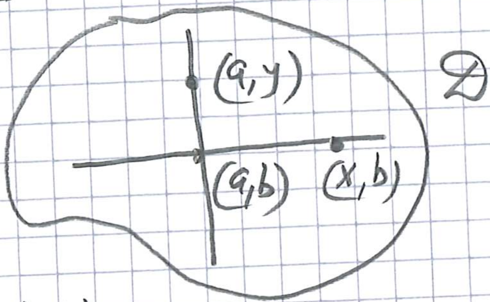
Partiella derivator

Låt $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o $(a,b) \in \operatorname{Int} \mathcal{D}$

Lägg märke till två en-variabel funktioner

$f(x,b)$ o $f(a,y)$



Def $$f'_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

Partiella derivatan av f m a p x i punkten (a,b)

Ex. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \neq 0)}} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \underline{0}$$

Obs $f'_x(a,b) = \left(f(x,b)\right)'_x \Big|_{x=a}$ (om denna existerar)

Ex. $f(x,y) = 3x^2y - \cos(x \cdot y)$

$f'_x(x,y) = \Big|$ tolka y som en konstant o derivera vanligt $\Big| =$

$= 6xy + \sin(x \cdot y) \cdot y$ ↑ inre derivatan

Analogt definierar man $f'_y(a,b)$

(Partiella derivatan m a p y).

o även partiella derivator av $f(x,y,z)$

m a p x, y, z resp. f'_x, f'_y, f'_z

EX. $f(x,y,z) = z \cdot e^{xy}$

$f'_x = |\text{frys } y,z| = z \cdot e^{xy} \cdot y = \frac{\partial f}{\partial x}$

$f'_y = |\text{frys } x,z| = z \cdot e^{xy} \cdot x = \frac{\partial f}{\partial y}$ (annat skrivsätt)

$f'_z = |\text{frys } x,y| = e^{xy} = \frac{\partial f}{\partial z}$

Högre derivator: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x = f''_{xx}$,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_x)'_y = f''_{xy}$,

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_y)'_x = f''_{yx}$ o s v

Obs ordningen!

EX. $f(x,y) = e^{2x+y^2}$.

$f'_x = \left(e^{2x+y^2}\right)'_x = e^{2x+y^2} \cdot (2x+y^2)'_x = e^{2x+y^2} \cdot 2$

$f'_y = \left(e^{2x+y^2}\right)'_y = e^{2x+y^2} \cdot (2x+y^2)'_y = e^{2x+y^2} \cdot 2y$ inre derivat

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \left(2e^{2x+y^2}\right)'_y = 2 \cdot e^{2x+y^2} \cdot 2y$

$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \left(2y \cdot e^{2x+y^2}\right)'_x = 2y \cdot e^{2x+y^2} \cdot 2$

Obs $f''_{xy} = f''_{yx}$ (ingen slump)

def $f \in C^k$ om alla r:te, $r \le k$, derivator är kontinuerliga.

<u>Sats</u> Om $f \in C^2$ så är $f''_{xy} = f''_{yx}$.

(Samma gäller för n-variabel funktion).

<u>EX</u>. Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ s.a.

$$\begin{cases} f'_x = p(x,y) = 2x+y & (1) \\ f'_y = q(x,y) = x+2y & (2) \end{cases}$$

<u>Obs</u> f kallas då <u>potential</u> till (p,q).

<u>Lsg</u>. Frys y o integrera (1) på x som i en-variabel analys. $\Rightarrow$ (3) $f(x,y) = \int (2x+y)\,dx =$

$= x^2 + yx + c(y) \leftarrow$ <u>Obs</u> godtycklig en-var funktion $c(\cdot)$

Frys x o derivera (3) på y:

$$f'_y = (x^2+yx+c(y))'_y = \underline{x + c'(y) \overset{(2)}{=} x+2y}.$$

så är $c'(y) = 2y$. Lös ut $c(y) = \int c'(y)\,dy = \int 2y\,dy =$

$= y^2 + d$, där d är en godtyckl. konst.

Sammanfatta: $f(x,y) = x^2 + yx + y^2 + d$, $d \in \mathbb{R}$.

<u>Obs</u> man kan visa att potential existerar $\Leftrightarrow$

$p'_y = q'_x$.

<u>EX</u>. $\begin{cases} f'_x = xy \\ f'_y = xy \end{cases}$ <u>Obs</u> $(f'_x)'_y = (xy)'_y = x$

$\neq$

$(f'_y)'_x = (xy)'_x = y$

$\Rightarrow f$ saknas

<u>Obs</u> man kan visa det m.a.p. metoden från ex. ovan.

Differentierbarhet

I en-var analys om f är deriverbar så är f kontinuerlig.

I fler-var analys existensen $f'_x(P), f'_y(P)$ garanterar ej att f är kontinuerlig i P.

Ex $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Obs $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ men $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar ej (se förra Fö).

Def. $f(x,y)$ är differentierbar i (a,b) om $\exists$ tal A, B s.a.

$$\alpha(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - A\cdot h - B h}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$$

då $(h,k) \to (0,0)$

I så fall, $A = f'_x(a,b)$ o $B = f'_y(a,b)$. (visa själva).

Ex Visa att $f(x,y) = x\cdot y$ är differentierbar i $(1,1)$ enligt definitionen.

Bevis. $f(1,1) = 1$, $f'_x(1,1) = y|_{(1,1)} = \overset{=A}{1}$, $f'_y(1,1) = x|_{(1,1)} = \overset{=B}{1}$

Undersök gränsvärdet i

$$U = \frac{(1+h)\cdot(1+k) - 1 - 1\cdot h - 1\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{begränsad}} \cdot \underset{\to 0}{k} \to 0 \quad \text{v.h.v.}$$

Sats:

$$f \in C^1 \overset{①}{\Rightarrow} f \text{ differentierbar} \begin{array}{l} \overset{(2)}{\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \\ \qquad\quad \not\Downarrow ④ \quad \not\Uparrow ⑤ \\ \overset{③}{\Rightarrow} f \text{ (kontinuerlig)} \end{array}$$

$(f'_x, f'_y$ kont.$)$

Bevis (3):

$f(a+h,b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + \alpha(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2} \to f(a,b)$

då $(h,k)\to(0,0)$

(2), (4) se ovan, (5) $f(x,y)=|x|$.

Ex. $f(x,y)=x\cdot y$ är differentierbar i vilken punkt som helst i R^2 ty $f'_x = y$, $f'_y = x$ är kontinuerliga

Uttrycket $df(a,b)(h,k) = f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k$

Kallas differentialen av f i (a,b). $\left(f'_x(a,b)\ f'_y(a,b)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$

Obs $df(a,b) : R^2 \to R$ är en linjär funktion

Kort beteckning, $df = f'_x\cdot dx + f'_y\cdot dy$

Ex $f(x,y) = x^2y \Rightarrow df = 2xy\,dx + x^2dy$

Feluppskattning med df

Om $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ o f differentierbar så är

$(*)$ $f(\bar{x}+\Delta x) - f(\bar{x}) = \underbrace{f'_{x_1}\cdot\Delta x_1 + \dots + f'_{x_n}\cdot\Delta x_n}_{df(\overline{\Delta x})} \underbrace{+|\overline{\Delta x}|\cdot\alpha(\overline{\Delta x})}_{\text{rest, försumma om } \overline{\Delta x} \text{ liten}}$

$\approx df(\overline{\Delta x})$.

Ex Anta $|h|\le r$, $|k|\le s$. Lokalisera $f(a+h,b+k)$.

Använd $(*)$: $|f(a+h,b+k)-f(a,b)| \approx |f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k|$

$\le |f'_x(a,b)|\cdot|h| + |f'_y(a,b)|\cdot|k| \le |f'_x(a,b)|\cdot r + |f'_y(a,b)|\cdot s = F$

$\Rightarrow$ $f(a+h,b+k)$ appr. ligger på $[f(a,b)-F,\ f(a,b)+F]$.

F är fel vid ersättning av $f(a+h,b+k)$ med $f(a,b)$.