FÖ4 Kedjeregeln (derivering av sammansatta funktioner)

En var $$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{yttre der.}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{inre deriv.}} \qquad (*)$$

Obs $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Ex $$\frac{d}{dx} \sin(x^2+3x) = \underbrace{\cos(x^2+3x)}\cdot\underbrace{(2x+3)}$$

Generalisering till flervar:

$$\begin{tikzcd}
 & f(g(\bar{x})) \arrow[dr] & & \\
f(g(x)) \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "2"'] & & f(\bar{g}(\bar{x})) \arrow[r] & \bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) \\
 & f(\bar{g}(x)) \arrow[ur, "3"'] & &
\end{tikzcd}$$

1 $$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \text{frys } y \\ \text{använd } (*) \end{bmatrix} = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \text{frys } x \\ \text{använd } (*) \end{bmatrix} = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

Ex $$\frac{\partial}{\partial x} \cos(x\cdot y) = \begin{bmatrix} f(t) = \cos t \\ g(x,y) = x\cdot y \end{bmatrix} = \underbrace{-\sin(x\cdot y)}\cdot\underbrace{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cos(x\cdot y) = \underbrace{-\sin(x\cdot y)}\cdot\underbrace{x}$$

Ex Visa att $x\cdot h'_x - y\cdot h'_y = 0$ $\forall\, h(x,y) = f(x\cdot y)$, där $f(\cdot)$ en-var funkt.

Bevis $h'_x = f'(x\cdot y)\cdot y$, $h'_y = f'(x\cdot y)\cdot x$.

Insättn.: $x\cdot f'(x\cdot y)\cdot y - y\cdot f'(x\cdot y)\cdot x = 0$

Obs till ex. detta gäller för $h(x,y) = \cos(x\cdot y)$.

(2)

(2) <u>Obs</u> $f(\bar g(x))$ envar funk. Låt $\bar g(x) = (g_1(x), g_2(x))$.

$$\frac{d}{dx} f(\bar g(x)) = \left| \text{def, envar} \right| = \lim_{e \to 0} \frac{f(\overset{s+h}{g_1(x+e)}, \overset{t+k}{g_2(x+e)}) - f(\overset{s}{g_1(x)}, \overset{t}{g_2(x)})}{e} =$$

[<u>Obs</u> $\underbrace{g_1(x+e) - g_1(x)}_{s} = \underbrace{g_1'(x) \cdot e + O(e^2)}_{h} \to 0$ då $e \to 0$, g_1 deriv.

$\underbrace{g_2(x+e) - g_2(x)}_{t} = \underbrace{g_2'(x) \cdot e + O(e^2)}_{k} \to 0$ —"—, g_2 deriv

$f(s,t)$ differentierbar]

$$= \lim_{e \to 0} \frac{1}{e} \Big(f_s'(s,t) \cdot h + f_t'(s,t) \cdot k + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \underbrace{\alpha(h,k)}_{\downarrow 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0)} \Big)$$

$$= \lim_{e \to 0} \Big(f_s'(s,t) \cdot \underbrace{\frac{h}{e}}_{\to g_1'(x)} + f_t'(s,t) \cdot \underbrace{\frac{k}{e}}_{\to g_2'(x)} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{h}{e}\right)^2 + \left(\frac{k}{e}\right)^2}}_{\text{begränsad}} \cdot \underbrace{\alpha(h,k)}_{\downarrow 0} \Big)$$

$$= f_s'(s,t) \cdot g_1'(x) + f_t'(s,t) \cdot g_2'(x)$$

Eller kort: $\boxed{\frac{df}{dx} = f_s' \cdot s'(x) + f_t' \cdot t'(x)}$ $(**)$

<u>Obs</u> (1) & (2) $\Rightarrow$ (3). Låt $\bar g(\bar x) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$.
$f(s,t)$

$\Rightarrow f(\bar g(\bar x))$ tvåvar funkt.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\bar g(\bar x)) = \left[\text{frys } y \text{ o använd} (**) \right] = f_s' \cdot s_x' + f_t' \cdot t_x' =$$

$$= \boxed{\frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f_x'}\,, \quad \text{Analogt,}$$

$$\boxed{f_y' = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}}\,, \quad \text{motsvar till } n \geq 3 \text{ var.}$$

Matrisform: $(f'_x, f'_y) = (f'_s, f'_t)\cdot\begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix}$

Ex. Lös (PDE) $f'_x - f'_y = y - x$ (*)

med bivillkor $f(x,0) = x^3+1$. Ledning: inför nya variabler $\begin{cases} s = x+y \\ t = x\cdot y \end{cases}$

Lsg. Transformera (*) till nya variablerna.

Kedjeregeln: $\begin{cases} f'_x = f'_s\cdot s'_x + f'_t\cdot t'_x \\ f'_y = f'_s\cdot s'_y + f'_t\cdot t'_y \end{cases}$ | $s'_x = 1,\ s'_y = 1$; $t'_x = y,\ t'_y = x$

För insättning i (*): $(\underline{f'_s\cdot 1} + f'_t\cdot y) - (\underline{f'_s\cdot 1} + f'_t\cdot x) = y - x$

eller

$(y-x)\cdot f'_t = y - x \Rightarrow f'_t = 1$ (**)

(ska gälla $\forall\, x,y$) — (*) är transformerad.

Lös den nya PDE (**): $f(t,s) = \int 1\,dt =$

$= t + g(s)$, där $g(\cdot)$ är en godt. en-var funkt.

$\Rightarrow$ Åter till x,y: $\underline{f(x,y) = x\cdot y + g(x+y)}$ är

den allmänna lsgen till (*).

Finn den partikulära lsgen med villkoret $f(x,0) = x^3+1$

Obs $f(x,0) = x\cdot 0 + g(x+0) = \underbrace{g(x) = x^3+1}$ $\Rightarrow g(x+y) = (x+y)^3+1$

$\Rightarrow f(x,y) = x\cdot y + (x+y)^3 + 1$ är lsgen som

satisfierar bivillkoret.

Ex. Byte till polära koordinater $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

(om det behövs för transform. av PDE med ρ, φ-derivator)

$$\begin{cases} f'_\rho = f'_x \cdot x'_\rho + f'_y \cdot y'_\rho = f'_x \cdot \cos\varphi + f'_y \cdot \sin\varphi \\ f'_\varphi = f'_x \cdot x'_\varphi + f'_y \cdot y'_\varphi = f'_x \cdot (-\rho\sin\varphi) + f'_y \cdot \rho\cos\varphi \end{cases}$$

På matrisform: $(f'_\rho, f'_\varphi) = (f'_x, f'_y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}}_{= A}$

lös ut

$$(f'_x, f'_y) = (f'_\rho, f'_\varphi) \cdot A^{-1} = (f'_\rho, f'_\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} \end{pmatrix}$$

(Obs det $A = \rho$)

Ex. Bestäm alla lösningar till PDE av ord 2:

$$x \cdot f''_{xy} - y \cdot f''_{yy} - f'_y = 0.$$

Ledning: inför nya variabler $\begin{cases} u = x \\ v = x \cdot y \end{cases}$

Lsg. Kedjeregeln: $\begin{cases} f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \\ f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \end{cases}$ $\Bigg|$ $u'_x = 1$, $u'_y = 0$; $v'_x = y$, $v'_y = x$

$\Rightarrow f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot y$, $f'_y = f'_u \cdot 0 + x \cdot f'_v$

Operatorer: $(\cdot)'_x = (\cdot)'_u + y \cdot (\cdot)'_v$, $(\cdot)'_y = x \cdot (\cdot)'_v$ $\quad (*)$

I stället för $(\cdot)$ kan sättas godtyck. funktion.

5

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (x \cdot f'_v)'_y = x \cdot (f'_v)'_y = [\text{använd } (*)]$$

$$= x \cdot \left(x \cdot (f'_v)'_v \right) = \underline{x^2 f''_{vv}}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'_u + f'_v \cdot y)'_y = \underbrace{(f'_u)'_y}_{\text{anv. } (*)} + \underbrace{(f'_v \cdot y)'_y}_{\text{anv. produkt regeln}} =$$

$$= x \cdot (f'_u)'_v + f'_v + y \cdot \underbrace{(f'_v)'_y}_{\text{anv. } (*)} =$$

$$= \underline{x f''_{uv} + f'_v + xy f''_{vv}}.$$ Fortsätt med insättning.

$$x \cdot (x f''_{uv} + \underline{f'_v} + \underline{\underline{xy f''_{vv}}}) - \underline{\underline{y\, x^2 f''_{vv}}} - \underline{x f'_v} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot f''_{uv} = 0 \Rightarrow \underbrace{f''_{uv} = 0}_{\text{transformerad}} \quad (\#) \text{ nya PDE}$$

gäller $\forall x$

Lös (#): Obs $f''_{uv} = (f'_u)'_v \Rightarrow f'_u = \int 0 \, dv = g(u)$,

där g är en godt. envar funkt $\Rightarrow f = G(u) + h(v)$

($G' = g$) godt.

$\Rightarrow$ Åter till x, y: $\underline{f(x,y) = G(x) + h(x \cdot y)}$ (allm. lsg)

Finn speciell f s.a. $f(x,1) = 0$, $f'_y(x,1) = 2x^2$:

$f(x,1) = 0 = G(x) + h(x \cdot 1) \Rightarrow h(x) = -G(x) \Rightarrow f(x,y) = G(x) - G(x \cdot y)$

$f'_y = (G(x) - G(x \cdot y))'_y = 0 - G'(x \cdot y) \cdot x \overset{\text{Obs}}{=} -g(x \cdot y) \cdot x$; $(G' = g)$

Givillkor $\Rightarrow f'_y(x,1) = 2x^2 = -g(x \cdot 1) \cdot x$, $\Rightarrow g(x) = -2x \Rightarrow$

$G(x) = -x^2 + c \Rightarrow f(x,y) = (-x^2 + c) - (-(x \cdot y)^2 + c) = \underline{x^2 y^2 - x^2}$