Gradienter o riktningsderivator

Betrakta $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o $P \in D_f$.

Gradienten av f i punkten P är **vektorn**

$$\nabla f(P) = \text{grad} f(P) = (f'_{x_1}(P), \ldots, f'_{x_n}(P))$$

Ex $f(x,y) = x^2 \cdot y$ o $P(1,3)$. $\Rightarrow \nabla f = (f'_x, f'_y) = (2xy, x^2)$

o $\nabla f(1,3) = (6, 1)$.

Hessianen av f i P är matrisen

$$Hf(P) = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ \hline f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{bmatrix} \quad \left(\text{symmetrisk om } f \in C^2\right)$$

Ex f från ex ovan $f''_{xx} = 2y, f''_{xy} = 2x, f''_{yy} = 0$

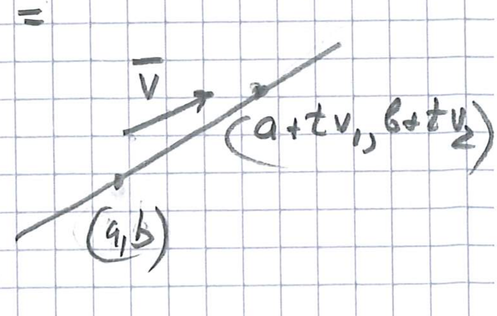
$$\Rightarrow Hf = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \text{ o } Hf(1,3) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten $P(a,b)$

o riktning $\overline{v} = (v_1, v_2)$, där $|\overline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ def. av

$$f'_{\overline{v}}(a,b) = \frac{d}{dt} f(a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2) \Big|_{t=0} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2) - f(a,b)}{t}$$



Mäter hur f ändras i $\overline{v}$:s riktning.

Obs om $\overline{v} = (1,0)$ så är $f'_{\overline{v}} = f'_x$

Om $f \in C^1$ så är $\frac{d}{dt} f(a+t\cdot v_1,\ b+t\cdot v_2) = \left[\text{Kedjeregeln}\right]$

$$= f'_x(a+t\cdot v_1,\ b+t\cdot v_2)\cdot v_1 + f'_x(a+t\cdot v_1,\ b+t v_2)\cdot v_2 = \nabla f \cdot \bar{v}$$

Sammanfatta:

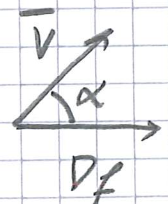
(*) $\underline{f'_v = \nabla f \cdot \bar{v} \quad \text{om } f \in C^1}$ motsvarande gäller $\underline{\text{för } n \geq 2}$

$\underline{\text{Ex.}}$ f från ex ovan. Anta $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. $\underline{\text{Obs}}$ $|\bar{v}|=1$

$$\Rightarrow f'_v(1,3) = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$\underline{\text{Obs}}$ $\left[\begin{array}{l} \text{Om } f'_v > 0 \text{ så växer } f \text{ i } \bar{v}\text{:s rikt,} \\ \text{om } f'_v < 0 \text{ så avtar } f \text{ —"—} \end{array}\right.$

Repetera att $\nabla f \cdot \bar{v} = \underbrace{|\nabla f|\cdot \overset{=1}{|\bar{v}|}\cdot \cos\alpha}_{= |\nabla f|\cdot\cos\alpha}$



$\underline{o}$ $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$,
$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$\Rightarrow \nabla f$ pekar i den riktning f växer snabbast
$-\nabla f$ —"— avtar —"—

$\underline{\text{Ex.}}$ f från ex. ovan $\nabla f(1,3) = (6,1)$

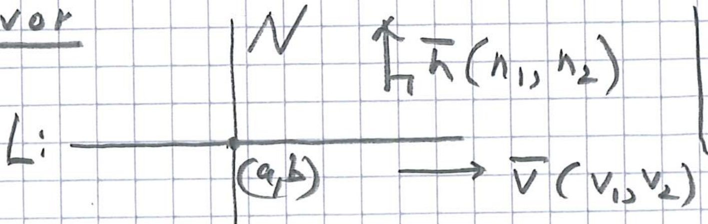
$\Rightarrow$ f växer snabbast i rikt. $\bar{v} = \frac{1}{|(6,1)|}\cdot(6,1) = \frac{1}{\sqrt{37}}(6,1)$

f avtar snabbast i rikt.

$$\bar{v} = -\frac{1}{\sqrt{37}}(6,1)$$

Kurvor

Räta linjer:



Välj $\bar{n}\ (-v_2, v_1)$

$$L: \begin{cases} x = a + t\cdot v_1, & t \in \mathbb{R} \\ y = b + t\cdot v_2 \end{cases}$$

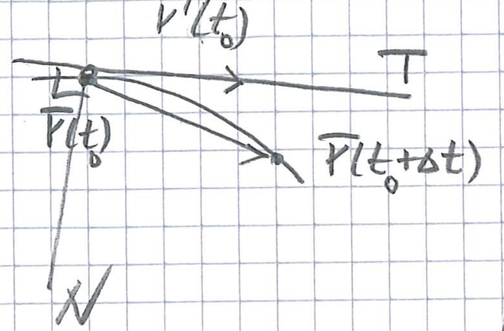
eller $(-v_2)(x-a) + v_1\cdot(y-b) = 0$

Analogt,

$$N: \begin{cases} x = a - v_2 \cdot t \\ y = b + v_1 \cdot t, \ t \in R \end{cases} \quad \text{eller} \quad v_1 \cdot (x-a) + v_2 \cdot (y-b) = 0$$

En kurva i planet (på parameterform)

$\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a,b) \subseteq R$ $(x(t), y(t)$ deriverbara$)$



Låt $\Delta t \to 0 \Rightarrow$

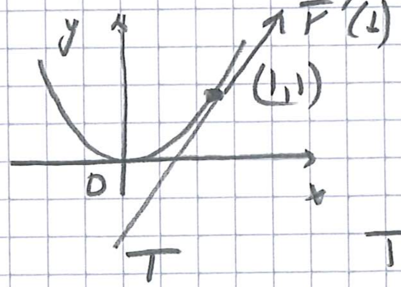
$$\bar{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} = (x'(t_0), y'(t_0))$$

Kallas <u>tangentvektor</u> till kurvan i punkten $\bar{r}(t_0)$

Linjen
$$T: \begin{cases} x = x(t_0) + s \cdot x'(t_0) \\ y = y(t_0) + s \cdot y'(t_0), \ s \in R \end{cases}$$
<u>en tangentlinje</u>

$$N: \begin{cases} x = x(t_0) - y'(t_0) \cdot s \\ y = y(t_0) + x'(t_0) \cdot s, \ s \in R \end{cases}$$
<u>en normallinje</u>

<u>Ex.</u> $\bar{r}(t) = (t, t^2)$ Obs $y = x^2$ (en parabel)



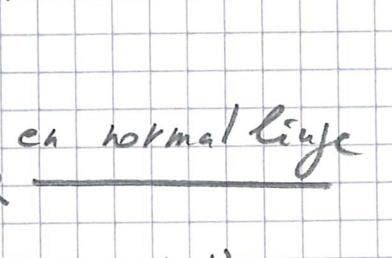
$\bar{r}'(t) = (1, 2t)$

$\bar{r}'(1) = (1, 2)$ (tangentvektorn)

$$T: \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot s \\ y = 1 + 2 \cdot s, \ s \in R \end{cases}$$
(tangentlinje)

<u>Ex</u> $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ (enhetcirkeln)

$\bar{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$



<u>Obs</u> $\bar{r}(t) \cdot \bar{r}'(t) = 0$ d.v.s. $\bar{r}(t) \perp \bar{r}'(t)$

$\bar{r}''(t) = -(\cos t, \sin t) = -\bar{r}(t)$ kallas <u>acceleration</u>

Nivåkurvor i planet: $f(x,y)=c$, c är en konst.

Om kurvan $f=c$ kan parametriseras d v s.

$\bar{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in(a,b)\subset R$ o $f\in C^1 \Rightarrow$

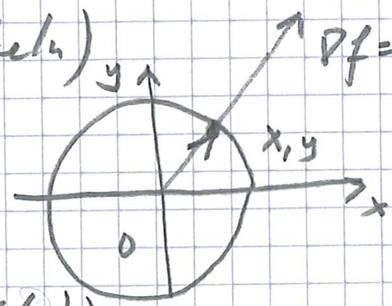
$$0=\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\left[\text{Kedjeregeln}\right]=f'_x\cdot x'(t)+f'_y\cdot y'(t)=$$

$$=\nabla f\cdot \bar{r}'(t)$$ $\Rightarrow$ ∇f är vinkelrät till nivåkurvan

Ex $f(x,y)=x^2+y^2$ o $c=1$.

Nivåkurvan $x^2+y^2=1$ (enhetscirkeln)

$\nabla f(x,y)=(2x,2y)=2(x,y)$

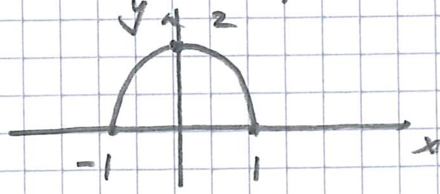


Grafer i planet: $y=f(x)$, $x\in(a,b)$

1) kan presenteras på parameter form: $\begin{cases} x=x \\ y=f(x)\end{cases}$ (x parameter)

2) Kan presenteras som nivåkurvor:
Inför $F(x,y)=y-f(x)$ o Obs nivåkurvan $F(x,y)=0$ är grafen $y=f(x)$.

Ex Betrakta övre delen av ellipsen
$K:\ x^2+\frac{1}{4}y^2=1$

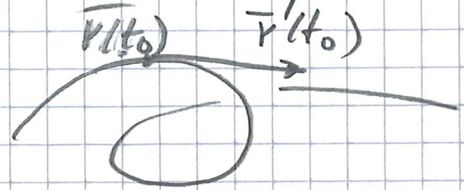


Parameterform:
$\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t,\quad t\in[0,\pi]\end{cases}$

Nivåkurvaform:
$x^2+\frac{1}{4}y^2=1,\ y\geq 0$

Grafform: $y=\sqrt{4-4x^2}$, $-1\leq x\leq 1$

I rummet R^3.



$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Ex $\quad \bar{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $\quad \bar{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$.