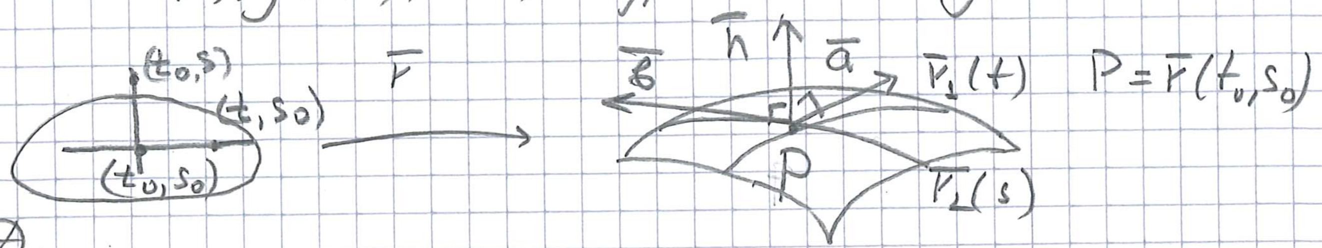
Fö 6 Ytor o. tangentplan

1 Två-dimensionell yta i R^3 (på parameter form)

$\bar{r}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)) : D \subset R^2_{t,s} \longrightarrow R^3_{xyz}$,

där $x(t,s), y(t,s), z(t,s)$ differentierbara funktioner.



Betrakta $\bar{r}_1(t) = \bar{r}(t, s_0)$, $\bar{r}_2(s) = \bar{r}(t_0, s)$

(Kurvor i R^3). Obs $\bar{r}_1(t_0) = \bar{r}_2(s_0) = P$.

Låt $\bar{a} = \frac{d}{dt}\bar{r}_1(t_0)$, $\bar{b} = \frac{d}{ds}\bar{r}_2(s_0)$ (tangentvektorer)

o $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{0}$. Då definierar $\bar{a}, \bar{b}$ o P ett plan

i rummet som går genom P o som har normalvektor $\bar{n}$.

Planet kallas tangentplan till ytan i P.

Om $\bar{n}(A,B,C)$ o $P(x_0,y_0,z_0)$ så är

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C\cdot(z-z_0) = 0$ planets ekv.

Ex. Bestäm ekv för tangetplanet till ytan

$$\bar{r}(u,v): \begin{cases} x = 2\cos u \sin v \\ y = 4\cos u \cos v \\ z = 2\sin u \end{cases}$$

i $P = \bar{r}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

Obs $P(1, 2, \sqrt{2})$

Finn $\bar{n}$.

$\bar{r}_1(u) = (\sqrt{2}\cos u, 2\sqrt{2}\cos u, 2\sin u)$, $\bar{r}' = (-\sqrt{2}\sin u, -2\sqrt{2}\sin u, 2\cos u)$

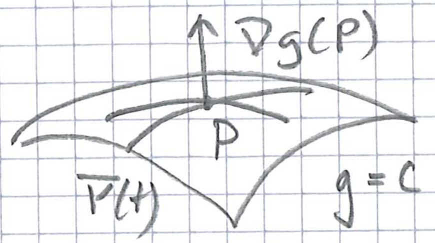
$\bar{a} = \bar{r}_1'(\pi/4) = (-1, -2, \sqrt{2})$.

$\bar{r}_2(v) = (\sqrt{2}\sin v, 2\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2})$, $\bar{r}_2' = (\sqrt{2}\cos v, -2\sqrt{2}\sin v, 0)$,

$\bar{b} = \bar{r}_2'(\pi/4) = (1, -2, 0)$, $\Rightarrow \bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ $\Rightarrow$

planets ekv: $2\sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2}(y-2) + 4(z-\sqrt{2}) = 0$

(2) Nivåytan: $g(x,y,z) = c$, c är konstant.



Betrakta en kurva på ytan,
$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Obs $g(\bar{r}(t)) = c \quad \forall t$

$\Rightarrow \nabla g(P) \cdot \bar{r}'(P) = 0$ d.v.s. $\nabla g(P)$ är
(Kedjeregeln) en normal vektor till ytan i P. (= tangentplanet)

Ex Betrakta sfären $x^2+y^2+z^2=1$.
Inför $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow$ sfären är nivåytan $g=1$.
$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$. Ta punkten $P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ på sfären
(gör kontroll!)

$\bar{n} = \nabla g(P) = \frac{2}{3}(2,1,2)$. är en normal vektor till $g=1$ i P.

Tangentplanet's ekv: $2(x-\frac{2}{3}) + 1\cdot(y-\frac{1}{3}) + 2(z-\frac{2}{3}) = 0$.
eller $\underline{2x+y+2z=3}$

(3) Grafer $z = f(x,y)$ som ytor

Obs (a) $f(x,y) - z = 0$. Inför $g(x,y,z) = f(x,y) - z$.
$\Rightarrow$ grafen är nivåytan $g=0$, $\nabla g = (f'_x, f'_y, -1)$

(b) $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = f(t,s) \end{cases}$ parameterframställning av grafen.

Låt $P(a,b,c) \in$ grafen d.v.s. $c = f(a,b)$
Notera att $\bar{n} = (f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1)$ är normalvektor.

$\Rightarrow$ $f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)\cdot(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$ är tangentplan eller $z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$.

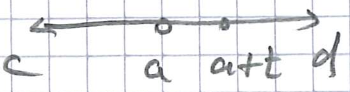
Ex. $f(x,y) = x \cdot y$, Obs $P(1,1,1) \in$ grafen $z = f(x,y)$

$(f(1,1) = 1)$

$f'_x(1,1) = 1$, $f'_y(1,1) = 1 \Rightarrow z = 1 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1)$ är tangentplanets ekv.

Taylors formel, ordning 2, för $f(x,y) \in C^3$.

En-var analys: Om $F(t) \in C^3$ på $(c,d) \subset R$ o $a \in (c,d)$ så är $F(a+t) = F(a) + F'(a)t + \frac{F''(a)t^2}{2} + \frac{1}{6}F'''(a+\theta(t)\cdot t)\cdot t^3$, där $\theta(t) \in (0,1)$, för varje t s.a. $a+t \in (c,d)$



$P_1(t) = F(a) + F'(a)\cdot t$ (Taylor polynom av grad 1)

$P_2(t) = P_1(t) + \frac{F''(a)\cdot t^2}{2}$ (—″— grad 2)

$\frac{1}{6}F'''(a+\theta(t)\cdot t^2)\cdot t^3$ (restterm)

Om $a=0$ så är $F(t) = F(0) + F'(0)\cdot t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \frac{1}{6}F'''(\theta(t)\cdot t)\cdot t^3$

(Maclaurins formel av grad 2)

Generalisera till fler variabler.

$$\left[\; f(a+h, b+k) = f(a,b) + Df(a,b) \overset{\text{skalär produkt}}{\cdot} (h,k) + \frac{1}{2}\underbrace{(h,k)\cdot Hf(a,b)\cdot \binom{h}{k}}_{\text{matrisprodukt}} + \underset{\text{rest}}{R} \right.$$

$$= f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot hk + f''_{yy}(a,b)\cdot k^2\right)}_{Q(h,k)} + R,$$

där $R = O\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3\right)$, $Hf = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$

för $n \geq 3$: $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $\bar{h}^t = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ får man

$$\left[\; f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \bar{h}\cdot Df(\bar{a}) + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{h}\cdot Hf(\bar{a})\,\bar{h}^t}_{Q(\bar{h})} + O(|\bar{h}|^3). \right.$$

Obs $Q(\bar{h})$ är en kvadratisk form.

För 3 variabler fås

$$Q(h_1, h_2, h_3) = Q(h, k, l) = f''_{xx} \cdot h^2 + f''_{yy} \cdot k^2 + f''_{zz} \cdot l^2 +$$
$$+ 2(f''_{xy} \cdot h \cdot k + f''_{xz} \cdot hl + f''_{yz} \cdot kl).$$

Taylor polynom:

$$P_1 = f(\bar{a}) + \bar{h} \cdot \nabla f(\bar{a}), \quad P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \bar{h} \cdot Hf(\bar{a}) \cdot \bar{h}^t.$$

EX. $f(x, y) = \cos(x + 2y)$, $(a, b) = (0, 0)$

$f'_x = -\sin(x+2y)$, $f'_y = -2\sin(x+2y)$, $f''_{xx} = -\cos(x+2y)$,

$f''_{xy} = -2\cos(x+2y)$, $f''_{yy} = -4\cos(x+2y) \Rightarrow$

$f(0,0) = 1$, $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$, $f''_{xx}(0,0) = -1$,

$f''_{xy}(0,0) = -2$, $f''_{yy}(0,0) = -4 \Rightarrow$ Taylor formel kring $(0,0)$

$$f(h, k) = 1 + 0 \cdot h + 0 \cdot k + \frac{1}{2}(-h^2 - 4hk - 4k^2) + O\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}h^2 - 2hk - 2k^2 + O\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3\right).$$

Bevisskiss. Inför $F(t) = f(a + h \cdot t, b + k \cdot t)$, $t \in \mathbb{R}$

Maclaurins formel används: (för $t = 1$) Obs $F(0) = f(a, b)$,
$F(1) = f(a+h, b+k)$,

$$F'(0) \cdot 1 = (h, k) \cdot \nabla f(a, b), \quad \frac{F''(0)}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}(h, k) \cdot Hf \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot 1^2.$$