Fö 7 Lokala extrempunkter

Låt $f(x,y): D_f \subset R^2 \to R$ o (a,b) inre punkt i D_f.

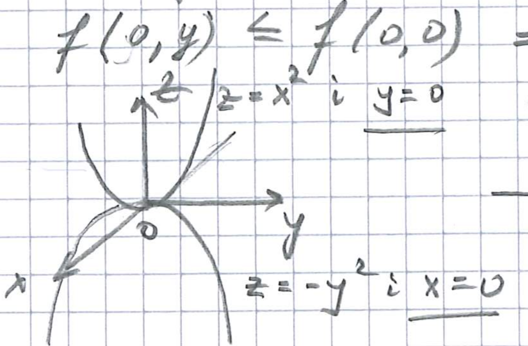
Def. $f(x,y)$ har ett lokalt maximum i (a,b) om $f(a,b) \geq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U$, där U är en omgivning av (a,b).

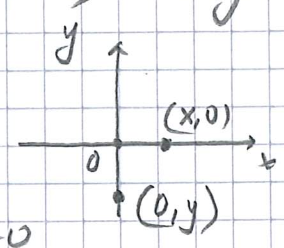
Om $f(a,b) > f(x,y)$ $\forall (x,y) \neq (a,b)$ ($\in U$) så har f ett strängt lokalt maximum i (a,b).

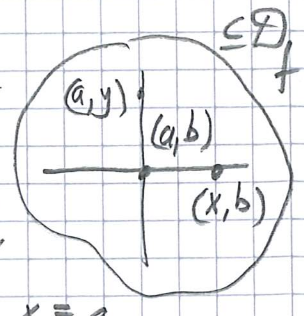
Punkten (a,b) kallas (sträng) lokal maximipunkt. Analogt med lokalt minimum etc o för fler än 2 variabler. Begrepp ovan kallas lokala extremvärde o lokala extrempunkter.

Ex $f(x,y)=x^2+y^2$, Obs $f(x,y) \geq f(0,0)=0$ är ett strängt lokalt (även globalt) minimivärde, $(0,0)$ är en sträng lokal minimipunkt.

Ex $f(x,y)=x^2-y^2$. Obs $f(x,0) \geq f(0,0)=0$ o $f(0,y) \leq f(0,0)$ $\Rightarrow$ origo är ingen lokal extrempunkt (en sadelpunkt).







Obs Om f har lok. max i (a,b) så har en-var funktion $g(x)=f(x,b)$ lok. max i $x=a$ $\Rightarrow$ $g'(a)=0$ (om $\exists g'$). Men $g'(a) = f'_x(a,b)$. samma i y-led o för lok. min. $\Rightarrow$

Sats Om $f'_x(a,b), f'_y(a,b)$ existerar o (a,b) är inre lokal extrempunkt så är $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ dvs $\nabla f(a,b) = \bar{0}$

Analogt för fler än 2 variabler.

En punkt $\bar{a}$ där $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ kallas stationär.

Obs I ex. ovan origo är en stationär punkt.

Ex. $f(x,y) = x^2 + y$. Är origo stationär? $\nabla f = (2x, 1)$

$\nabla f(0,0) = (0,1) \neq \bar{0} \Rightarrow$ origo är inga stationä punkt.

Ex. $f(x,y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$. Finn stationära punkter

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6y - 9 = 0 & (1) \\ f'_y = 6x + 6y = 0 & (2) \Rightarrow y = -x \end{cases}$$

insättning

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ eller $x = -1 \Rightarrow P_1(3,-3)$ o

$ y = -3 \qquad\quad y = 1 \qquad P_2(-1,1)$

stationära punkt.

Obs stationära punkter kan vara lokala extrempunkter eller sadelpunkter

$f(x,y) = -x^2 - y^2$ $\qquad f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad f(x,y) = x^2 - y^2$

Hur avgör man om vi har lok max, lok. min eller sadel?

en-variabel analys man kan använda $f''(a)$

Fler-var Studera $Hf(\bar{a})$. Repetera Taylors formel

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \underbrace{\bar{h} \cdot \nabla f(\bar{a})}_{= 0} + \frac{1}{2} \bar{h} \cdot Hf(\bar{a}) \cdot \bar{h}^t + O(|\bar{h}|^3)$$

$\bar{0}$ för stationära punkter $\bar{a}$.

Inför $\underline{Q(\bar{h}) = \bar{h} \cdot Hf(\bar{a}) \cdot \bar{h}^t}$. (kvadratisk form)

$\Rightarrow$ om $\bar{a}$ är stationär så är

$$f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + O(|\bar{h}|^3) \approx f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h})$$

$\Rightarrow$ $Q(\bar{h})$ avgör punkten's karaktär. till ex.

Om $Q(\bar{h}) < 0 \ \forall \bar{h} \neq \bar{0}$ så är $f(\bar{a}) > f(\bar{a}+\bar{h}) \Rightarrow$ str. lok. max i $\bar{a}$.

Fyra möjligheter på Q

1) $Q(\bar{h}) < 0 \ \forall \bar{h} \neq \bar{0}$, Q negativt definit $\Rightarrow$ str. lok. max

2) $Q(\bar{h}) > 0 \ \forall \bar{h} \neq \bar{0}$, Q positivt definit $\Rightarrow$ str. lok. min

3) $Q(\bar{h}) < 0$ för visa $\bar{h}$ o $Q(\bar{h}) > 0$ för andra $\bar{h}$,
Q indefinit $\Rightarrow$ sadelpunkt.

4) a) $Q(\bar{h}) \leq 0 \ \forall \bar{h}$ o $\exists \bar{h} \neq \bar{0}$ s.a. $Q(\bar{h}) = 0$, negat. semidefinit

b) $Q(\bar{h}) \geq 0 \ \forall \bar{h}$ o $\exists \bar{h} \neq \bar{0}$ s.a. $Q(\bar{h}) = 0$, pos. semidefinit

(ingen slutsats kan dras, undersökes vidare)
till ex m h a definitionen.

Metoder studera $Q(\bar{h})$

1. Egenvärden till Hf. Ohs $\lambda_{min} \cdot |\bar{h}|^2 \leq Q(\bar{h}) \leq \lambda_{max} \cdot |\bar{h}|^2$
$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (ur lin. algebra)

$\Rightarrow$ 1. om $\lambda_{max} < 0$ så är Q neg. def.

2. Om $\lambda_{min} > 0$ så är Q pos. def.

3. $\lambda_{min} \cdot \lambda_{max} < 0$ så är Q indefinit

4. a) $\lambda_{max} = 0$, b) $\lambda_{min} = 0$, Q är semidefinit.

Ex $\quad Q(h,k) = h^2 + k^2 + 4hk = (h,k)\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{= Hf}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

Egenvärden: $\det(Hf - \lambda E) = 0 \Rightarrow$
(E enhetsmatris)

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda_1}_{= \lambda_{min}} = -1, \quad \underbrace{\lambda_2}_{= \lambda_{max}} = 3$$

$\lambda_{min} \cdot \lambda_{max} < 0 \Rightarrow Q$ är indefinit.

(2) Kvadratkomplettering:

Ex ovan: $\quad Q(h,k) = \underbrace{h^2 + 4hk} + k^2 = (h+2k)^2 - 4k^2 + k^2 =$

$= (h+2k)^2 - 3k^2$. $\quad$ Obs $\left.\begin{matrix} Q(-2,1) = -3 < 0 \\ Q(1,0) = 1 > 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow Q$ indefinit

för 3-variabler kan formeln: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ användas.

Ex $\quad f(x,y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$, vi hittade två stationära punkter $(3,-3)$, $(-1,1)$. Avgör deras karaktär.

Obs $\quad f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6$, $f''_{yy} = 6 \Rightarrow Hf = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

$(3,-3)$: $\quad Hf = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad |Hf - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (18-\lambda) & 6 \\ 6 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - 24\lambda + 72 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144-72} = 12 \pm 6\sqrt{2} > 0$$

$\Rightarrow \lambda_{min} > 0 \Rightarrow Q$ pos. def. $\Rightarrow (3,-3)$ str. lok. minimum.

$(-1,1)$: $\quad Hf = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad Q(h,k) = (h,k)\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} =$

$= -6h^2 + 12hk + 6k^2 = 6(k+h)^2 - 12h^2$

Obs $Q(1,-1) = -12 < 0$
$Q(0,1) = 6 > 0$ $\Rightarrow$ Q är indefinit
$\Rightarrow$ $(-1,1)$ en sadelpunkt.

EX Är origo en lok. extrempunkt för
$f(x,y) = 2 + 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x^4$?

Obs 1) $\nabla f(0,0) = \bar{0}$ $\Rightarrow$ origo är en stationär punkt.

2) $Q(h,k) = 8h^2 + 24hk + 18k^2 = 2(2h+3k)^2 \geq 0 \quad \forall (h,k)$
$\underline{o}$ $Q(-3,2) = 0$ $\Rightarrow$ Q är pos. semidefinit.

3). Använd definitionen:
$f(0,0) = 2$ $\underline{o}$ $f(x,y) - f(0,0) = \underbrace{(2x+3y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{6x^4}_{\geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow$ $f(x,y) \geq f(0,0) \quad \forall (x,y)$

$\Rightarrow$ origo är en lokal (även global) minimipunkt.