Fö 8 Funktionalmatriser

Låt $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots x_n))$ vara en avbildning av typ $R^n \to R^m$, där $f_i \in C^1 \ \forall i$. (kort, $f \in C^1$)

Matrisen (Jacobi)
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
(en $(m\times n)$-matris)

kallas funktionalmatrisen för $\bar{f}(\bar{x})$ o betecknas
$$\bar{f}'(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}.$$

Då $m=n$ är $\bar{f}'(\bar{x})$ kvadratisk o
$$\det \bar{f}'(\bar{x}) = \frac{d(f_1,\dots,f_n)}{d(x_1,\dots,x_n)}$$
kallas funktionaldeterminanten (Jacobi)

Ex. $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)) = (x_1\cdot x_2, x_1 - x_2)$

har $\bar{f}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ o $\det \bar{f}'(\bar{x}) = \det\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$
$$= -(x_1+x_2)$$

Ex $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\bar{x} \text{ (kolonn)}} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$

har $\bar{f}'(\bar{x}) = A$ Obs $\bar{f}(\bar{x}) = A\cdot\bar{x}$ (en linjär avbildning)

Avbildning $\bar{f}(\bar{x}) = A\cdot\bar{x} + \bar{b}$ kallas affin o
(konst. vektor)

denna har $\bar{f}'(\bar{x}) = A$.

Kedjeregeln (forts).

Betrakta $\bar{g}: R^n \to R^p$, $\bar{f}: R^p \to R^m$ o

den sammansatta avb. $(\bar{f}\circ\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x})): R^n \to R^m$

Den tidigare kedjeregeln tillämpad på varje komponent $f_j(\bar{g}(\bar{x}))$ i $\bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$ ger att <u>allmänna kedjeregeln</u> kan skrivas med matrismultiplikation av funktionalmatriser:

$$\underbrace{(\bar{f}\circ\bar{g})'(\bar{x})}_{(m\times n)\text{ matris}} = \underbrace{\bar{f}'(\bar{g}(\bar{x}))}_{(m\times p)\text{ matris}} \cdot \underbrace{\bar{g}'(\bar{x})}_{(p\times n)\text{ matris}} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{g}} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}}$$

<u>Ex.</u> $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{x_1 + 2x_2 + 3x_3}_{= g_1}, \underbrace{x_1 \cdot x_2 + x_3}_{= g_2})$,

$\bar{f}(g_1, g_2) = (\underbrace{g_1 + g_2^2}_{= f_1}, \underbrace{g_1^2 + g_2}_{= f_2})$. <u>Obs</u> $g: R^3 \to R^2$, $f: R^2 \to R^2$.

Finn $(\bar{f}\circ\bar{g})'(\bar{x})$.

<u>Lsg</u>.
$$\bar{g}'(\bar{x}) = \frac{\partial(g_1 g_2)}{\partial(x_1 x_2 x_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}'(\bar{g}) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(g_1, g_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2g_2 \\ 2g_1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\bar{f}\circ\bar{g})'(x) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) \cdot \bar{g}'(\bar{x}) = \left.\begin{pmatrix} 1 & 2g_2 \\ 2g_1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\substack{g_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ g_2 = x_1 \cdot x_2 + x_3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

<u>Obs</u> <u>ordning!</u> $\leftarrow$ <u>insättning</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(x_1 \cdot x_2 + x_3) \\ 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2x_2(x_1 \cdot x_2 + x_3) & 2 + 2x_1(x_1 \cdot x_2 + x_3) & 3 + 2(x_1 \cdot x_2 + x_3) \\ 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + x_2 & 4(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + x_1 & 6(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + 1 \end{pmatrix}$$

För en viss punkt, till ex. $\bar{x} = (1, 0, 1)$ fås

$\bar{g}(\bar{x}) = (4, 1)$, $(\bar{f}\circ\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) = (5, 17)$, för matriserna i punkten blir:

$$\bar g'(1,0,1) = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}, \quad \bar f'(4,1) = \begin{pmatrix}1&2\\8&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(f\circ g)'(1,0,1) = \begin{pmatrix}1&2\\8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4&5\\8&17&25\end{pmatrix}$$

Obs ordning

Ett speciellt fall: $m=n$ o $\bar g = \bar f^{-1}$ (invers)

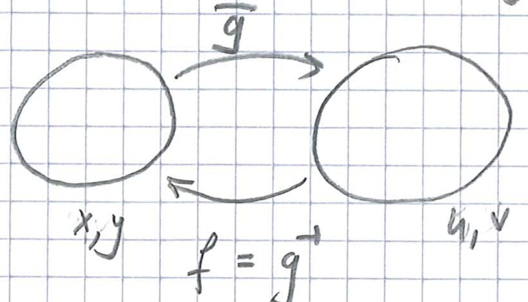
så är $(\bar f\circ\bar g)(\bar x) = \bar x = E\cdot\bar x$ (E enhetsmatris)

(en linjär avbild.)

$$\left.\begin{aligned}(\bar f\circ\bar g)'(\bar x) &= (E\cdot\bar x)' = E\\ &\shortparallel\\ \bar f'(\bar g(\bar x))&\cdot\bar g'(\bar x)\end{aligned}\right] \Rightarrow \underline{\bar g'(\bar x) = \left(\bar f'(\bar g(\bar x))\right)^{-1}} \quad \text{(matrisinvers)}$$

↑ Användes vid variabelbyte.

Ex. Betrakta variabelbyte från x,y till u,v



$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix}u'_x&u'_y\\v'_x&v'_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'_u&x'_v\\y'_u&y'_v\end{pmatrix}^{-1} \quad \text{o}$$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix}u'_x&u'_y\\v'_x&v'_y\end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix}x'_u&x'_v\\y'_u&y'_v\end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}} \quad \left(\text{Obs } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\right)$$

Ex. Byte till polära koord. $\begin{cases}x = \rho\cos\varphi\\ y = \rho\sin\varphi\end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \rho.$$

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial(xy)} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x & y\\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix} \quad \underline{O} \quad \frac{d(\rho,\varphi)}{d(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ex. Byte till sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{har} \quad \frac{d(xyz)}{d(r\theta\varphi)} = \underline{r^2\cdot\sin\theta} \geq 0 \quad \text{fy} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Linjärisering av $\bar{f}(\bar{x})$.

Taylors formel till ord 1 för varje komponent $f_j(\bar{x})$ av $\bar{f}(\bar{x})$ ger med $\bar{x} = \bar{a} + \bar{h} \Leftrightarrow \bar{h} = \bar{x} - \bar{a}$

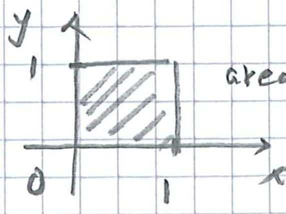
$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(\bar{a}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a})\cdot(\bar{x}-\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a)\cdot(\bar{x}-a) \end{pmatrix} =$$

$$= \bar{f}(\bar{a}) + \underbrace{\bar{f}'(\bar{a})}_{\text{(matris)}}\cdot\underbrace{(\bar{x}-\bar{a})}_{\text{(kolonn)}} = \underbrace{\bar{f}'(\bar{a})}_{A}\cdot\bar{x} + \underbrace{\bar{f}(\bar{a}) - \bar{f}'(\bar{a})\cdot\bar{a}}_{\bar{b}} =$$

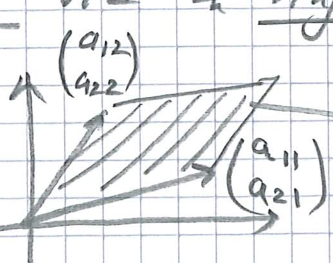
$$= \underline{A\cdot\bar{x} + \bar{b}} \quad \text{(en affin avbild.)}$$

linjärisering av $\bar{f}(\bar{x})$ nära $\bar{a}$.

Volym ändring vid en linjär avbildning

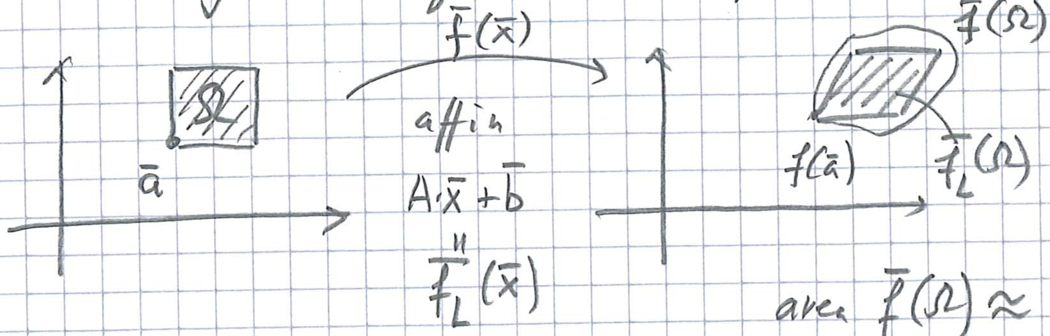


$$\xrightarrow{\bar{f}(\bar{x}) = A\cdot\bar{x}}$$



area $= |\det A|$ (area skalning)

Volym ändring vid en affin avbild.



$\bar{f} \approx \bar{f}_L$ nära $\bar{a}$

$$\text{area } \bar{f}(\Omega) \approx \bar{f}_L(\Omega) =$$

$$= \det A \cdot \text{area}(\Omega)$$

$\Rightarrow |\det \bar{f}'(\bar{a})|$ ger lokal area (volym) skalning nära $\bar{a}$.