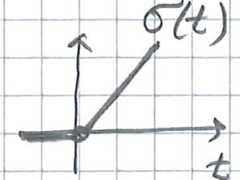
Fö 9

Med ett <u>neuronnät</u> menar vi en flervariabelfunktion som är en <u>sammansättning</u> av <u>flera enkla</u> funktioner.

<u>EX på enkla funktioner i ett neuronnät.</u>

(1) Låt $\sigma(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



$H(t) = \sigma'(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \\ \text{ej def}, & t = 0 \end{cases}$

För vektorer:

$$\bar{\sigma}(\bar{t}) = \bar{\sigma}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sigma(t_1) \\ \vdots \\ \sigma(t_n) \end{pmatrix}$$ av typ $R^n \to R^n$ med

funktionalmatris $$\bar{\sigma}'(\bar{t}) = \begin{pmatrix} \sigma'(t_1) & 0 \dots 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \dots\ \sigma'(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 0/1 \end{pmatrix} = H(\bar{t})$$

Kvadrat. matris med 0 eller 1 på diagonalen.

<u>till ex</u>: $\bar{\sigma}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\bar{\sigma}'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(2) $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$. Låt $\bar{u} = \bar{f}_1(\bar{x}) = \bar{\sigma}\Big(\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B_1}}_{\text{(affin)}}\Big) \in R^2$

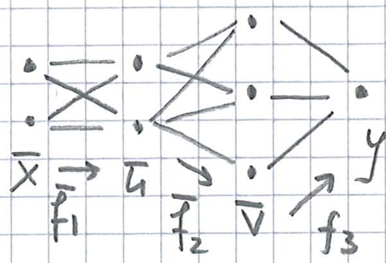
$$\bar{v} = (\bar{f}_2 \circ \bar{f}_1)(\bar{x}) = \bar{f}_2(\bar{f}_1(\bar{x})) = \bar{f}_2(\bar{u}) =$$
$$= \bar{\sigma}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{A_2 \\ \text{(linjär)}}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\Big) \in R^3$$

$$y = \underbrace{f(\bar{x}) = (f_3 \circ \bar{f}_2 \circ \bar{f}_1)(\bar{x})}_{\text{ett neuronnät}} = f_3(\bar{v}) = \underbrace{(1, -1, 1)}_{\substack{A_3 \\ \text{(linjär)}}}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in R$$

med $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ fås $\bar{u} = \bar{\sigma}\Big(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$\bar{v} = \bar{\sigma}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\Big) = \bar{\sigma}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = (1, -1, 1)\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

Grafisk representation av neuronnätet $f(\bar{x})$:



I fallet 3 lager $\bar{u}, \bar{v}, y$.

<u>Obs</u> Om enkla funktioner av givna som i ex ovan så kan man "lätt" hitta värdena av den sammansatta funktionen.

<u>Huvudproblem</u> är hur man kan hitta <u>ett neuronnäts element</u> som passar en viss tillämpning dvs alla matriser i alla lager (A, b etc)? (Varje lager är linjärt/affint följt av $\bar{\sigma}$)

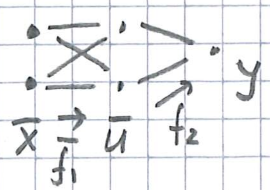
<u>Metod</u>: man utnyttjar att man har "träningsdata" för ett antal $\bar{x}$ med givna värdena y. o linjär algebra / flervariabel analys. (se nedan)

<u>Ex</u> Vi har 2 träningspunkter: $\hat{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ med $\hat{y}=1$ o $\tilde{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ med $\tilde{y}=5$.

Vi söker ett neuronnät med 2 lager: $f(\bar{x}) = (f_2 \circ \bar{f}_1)(\bar{x})$, där $\bar{f}_1(\bar{x}) = \bar{\sigma}(A_1 \cdot \bar{x} + \bar{b}_1)$ o $f_2(u) = A_2 \cdot \bar{u}$, här A_1 (2×2), $\bar{b}_1$ (2×1), A_2 (1×2). Alltså:

$$\bar{f}_1(\bar{x}) = \bar{u} = \bar{\sigma}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}}_{A_1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}}_{\bar{b}_1}\right)$$

$$f_2(\bar{u}) = y = (w_7 \ w_8) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



$$y = f(\bar{x}) = f_2(\bar{u}) = f_2(\bar{f}_1(\bar{x})) = (f_2 \circ \bar{f}_1)(\bar{x})$$

Man letar efter $A_1, \bar{b}_1, A_2$.

Bilda vektorn $(w_1, w_2, \dots, w_8) \in R^8$.

Vi söker alltså $\bar{w}$ som ska anpassas till träningsdata

<u>Obs</u> $\bar{f}_1$ kan anses bero på $w_1 \dots w_6$ o f_2 — w_7, w_8.

Vi ska skriva $f(\bar{x}, \bar{w})$ istället för $f(\bar{x})$.

Vi <u>minstakvadrat anpassar</u> matriserna $(w_1, \dots, w_8)$ till träningsdata:

<u>minimera</u> $$l(\bar{w}) = \frac{1}{2}\left(\big(\underbrace{f(\hat{x},\bar{w})-\hat{y}}_{d_1(\bar{w})}\big)^2 + \big(\underbrace{f(\tilde{x},w)-\tilde{y}}_{d_2(\bar{w})}\big)^2\right) \qquad (1)$$

<u>Obs</u> <u>Minproblem</u>: (a) lös ekv $\nabla l(\bar{w}) = \bar{0}$, (b) Kolla stationära punkter (i praktiken omöjligt att utföra)

Istället använder man $-$grad $l(\bar{w})$ metod.

<u>Obs</u>. $$\nabla l(\bar{w}) = \frac{1}{2}\nabla\left(d_1(\bar{w})^2 + d_2(\bar{w})^2\right) = \sum_{i=1}^{2} d_i(\bar{w}) \cdot \nabla_{\bar{w}} f(\hat{x}/\tilde{x}, \bar{w}) \qquad (2)$$
(derivator på $\bar{w}$)

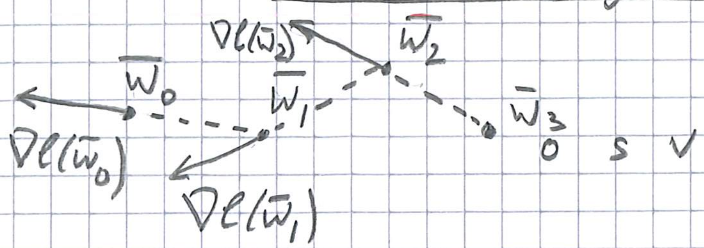
<u>Algoritm</u>: <u>Ta startpunkt</u> $\bar{w}_0 \in R^8$ (vilken som helst) o läs $l(\bar{w}_0)$

<u>Obs</u> l avtar snabbast i <u>riktning $-\nabla l(\bar{w}_0)$</u>.

<u>Ta steg</u> från $\bar{w}_0$ i den rikt. till ny punkt $\bar{w}_1$ o läs av $l(\bar{w}_1)$. <u>Ta nytt steg</u> i rikt. $-\nabla l(\bar{w}_1)$ till ny punkt $\bar{w}_2$ o så vidare. Stanna då $l(\bar{w}_k)$ (efter k-steg) acceptabelt litet.

Metoden kallas <u>brantaste lutning i optimering</u>.

<u>Bild</u>:



Hur beräknar man $\nabla l(\bar{w})$?

I (2) ser vi att det behövs partiella derivator av $f(\hat{x}, \bar{w})$ o $f(\tilde{x}, \bar{w})$ m a p $w_1, \dots, w_8$.

man hittar dem m h a <u>kedjeregeln</u>.

Beräkningar:

1. **Funktionalmatriser** i neuronnätet:

Låt $\bar{t} = A_1\bar{x} + \bar{b}_1$ (affin) $\Rightarrow \bar{t}'(\bar{x}) = \dfrac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} = A_1$,

Låt $\bar{u} = \bar{\sigma}(\bar{t}) \Rightarrow \bar{u}'(\bar{t}) = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = H(\bar{t})$.

$y = A_2 \cdot \bar{u}$ (linjär) $\Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial \bar{u}} = A_2$

2. **Derivator** på olika w_j (direkta)

$w_1, \ldots, w_6$: $\bar{t} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_5 \\ w_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1x_1 + w_2x_2 + w_5 \\ w_3x_1 + w_4x_2 + w_6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(w_1 \ldots w_6)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(\bar{x})$$

w_7, w_8: $y = (w_7 \ w_8)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = w_7 \cdot u_1 + w_8 \cdot u_2 \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial(w_7\, w_8)} = \underline{(u_1, u_2) = \bar{u}^t}$

3. Derivator av y på $w_1, \ldots, w_6$ med kedjeregeln

$$\frac{\partial y}{\partial(w_1 \ldots w_6)} = \frac{\partial y}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial(w_1 \ldots w_6)} = \underline{A_2 \cdot H(\bar{t}) \cdot M(\bar{x})}$$

__Nu starta algoritmen__. Välj en startpunkt i R^8,

till ex. $\bar{w}_0 = (\underbrace{1, -1, 2, 1}_{A_1}, \underbrace{1, -2}_{\bar{b}_1}, \underbrace{2, 1}_{A_2})$, d.v.s.

vi har neuronnät med $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = (2, 1)$.

__Beräkna $\ell(\bar{w}_0)$__ (se (1)): börja med $f(\hat{x}, \bar{w}_0)$ o $f(\tilde{x}, \bar{w}_0)$.

__Obs__ $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{t} = A_1\hat{x} + \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{u} = \bar{\sigma}(\hat{t}) = \bar{\sigma}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(\hat{x}, \bar{w}_0) = A_2 \cdot \hat{u} = (2, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{3}$. Vi ville $\underline{1}$.

Notera att $H(\hat{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $M(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{u} = \bar{\sigma}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$f(\tilde{x}, \bar{w}_0) = A_2 \cdot \tilde{u} = (2, 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$. Vi ville $\underline{5}$.

Notera att $H(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o $M(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\ell(\bar{w}_0) = \frac{1}{2}\left((3-1)^2 + (6-5)^2\right) = \underline{2.5}$. $\Leftarrow$ Felet med detta nät.

Se (2). $\nabla \ell(\bar{w}_0) = \underbrace{d_1(\bar{w}_0)}_{= 3-1} \cdot \left(A_2 \cdot H(\hat{t}) \cdot M(\hat{x}), \hat{u}^t\right) +$

$\underbrace{d_2(\bar{w}_0)}_{= 6-5} \cdot \left(A_2 \cdot H(\tilde{t}) \cdot M(\tilde{x}), \tilde{u}^t\right) =$

$$= 2 \cdot \Big(\underbrace{(2,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(2,2,1,1,2,1)}, 1, 1\Big) + 1 \cdot \Big(\underbrace{(2,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(2,-2,0,0,2,0)}, 3, 0\Big) =$$

$= (6, 2, 2, 2, 6, 2, 5, 2)$. Ta ett steg i minus denna riktning.

$\Rightarrow \bar{w}_1 = \bar{w}_0 - \eta \cdot \nabla \ell(\bar{w}_0)$. Välj $\eta = 0.05$ till ex.

$\Rightarrow \bar{w}_1 = (1, -1, 2, 1, 1, -2, 2, 1) - 0.05 \cdot (6, 2, 2, 2, 6, 2, 5, 2) =$

$$= (\underbrace{0.7, -1.1, 1.9, 0.9}_{\text{ny } A_1}, \underbrace{0.7, -2.1}_{\bar{b}_1}, \underbrace{1.75, 0.9}_{A_2})$$

Vi har då nytt neuronnät där matriserna ändrats till

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & -1.1 \\ 1.9 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -2.1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = (1.75, 0.9).$$

Bättre än gamla nätet? Kolla $\ell(\bar{w}_1)$:

$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger $\hat{t} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$, $\hat{u} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$, $f(\hat{x}, \bar{w}_1) = 1.155$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ger $\tilde{t} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$, $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\tilde{x}, \bar{w}_1) = 4.375 \Rightarrow$

$\ell(\bar{w}_1) = \frac{1}{2}\left((1.155 - 1)^2 + (4.375 - 5)^2\right) \approx 0.21 < 2.5 = \ell(\bar{w}_0)$!

förbättring.

Fortsätt på samma sätt till $\ell(\bar{w}_k)$ så lika att man är nöjd. Då har man sitt neuronät $f(\bar{x})$ klart. man har tränat eller lärt upp det o man kan nu sätta nya $\bar{x}$ (ej träningsdata) o se vad $y = f(\bar{x})$ blir.

Se mer om detta på kursens hemsida.