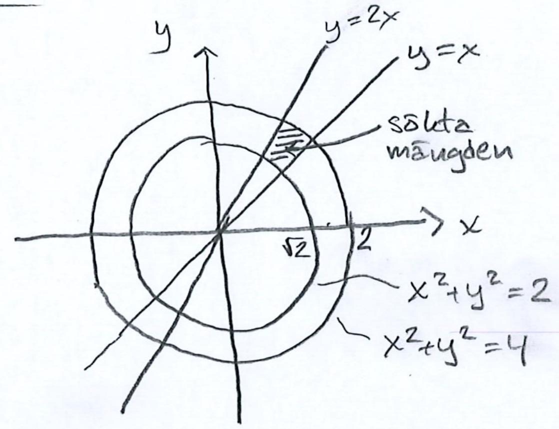
Bilder mm 1.7, 1.8, 1.9, 1.12, 1.13

1.7 a)



$x \le y \le 2x$: ovanför linjen $y=x$ under linjen $y=2x$

$2 \le x^2+y^2 \le 4$: mellan cirklarna med radier $\sqrt{2}$ och 2

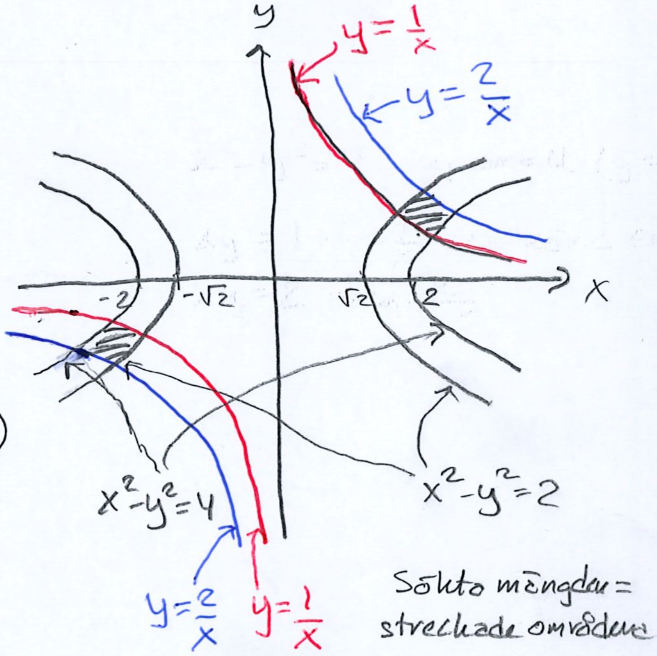
b) $x^2-y^2=2$ hyperbel $(y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2})$

$x^2-y^2=4$ hyperbel $(y=0 \Rightarrow x=\pm 2)$

$xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$ välkänd envar. funktion

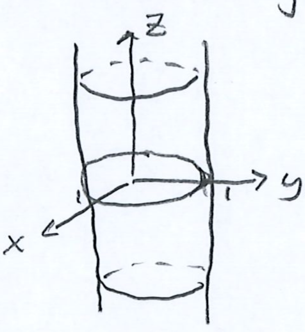
$xy=2 \Rightarrow y=\frac{2}{x}$

($xy=1$ och $xy=2$ är också hyperbler som ligger snett (45°) mot axlarna)

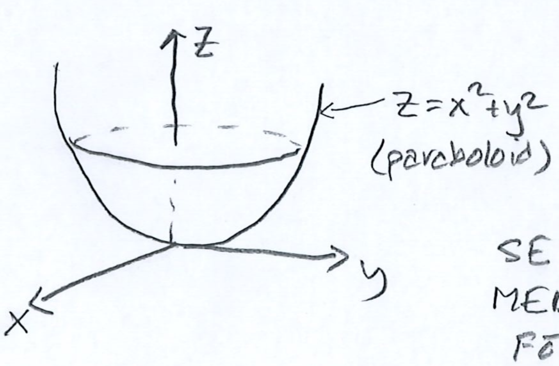


Sökta mängden = streckade områdena

1.8a) $x^2+y^2=1$ är enhetscirkeln i $\mathbb{R}^2$ men en cylinder i $\mathbb{R}^3$; z-värdet kan väljas fritt.

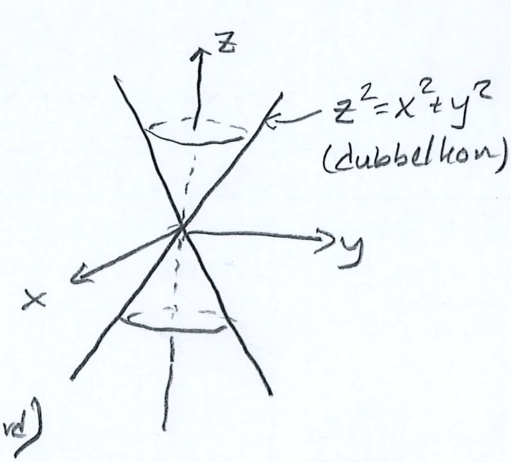


b)



SE VIDEO MED TIPS FÖR 8bc (hur man kan använda polära koord)

c)



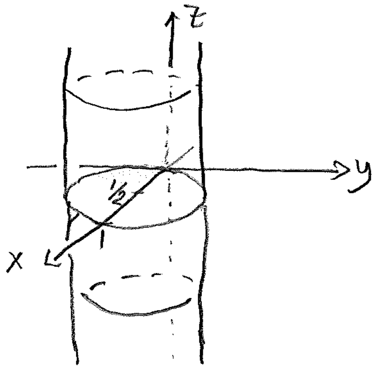
1.8d) $x^2+y^2=x \iff$

$x^2-x+y^2=0 \iff$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$

cirkel i $\mathbb{R}^2$, mitt $(\frac{1}{2},0)$, radie $\frac{1}{2}$

men cylinder i $\mathbb{R}^3$



1.9a) $x+y+z=1$ är ett plan genom

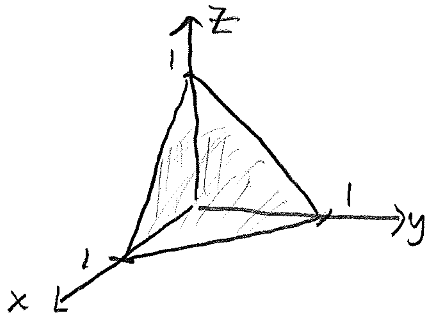
$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

$x+y+z\leq 1 \Rightarrow$ vi ska vara "under"

detta plan,

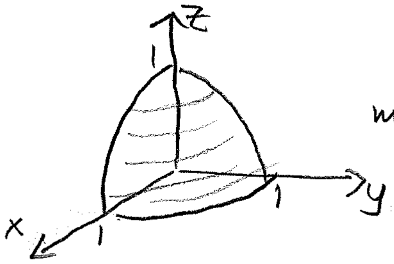
Men också ska $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

$\Rightarrow$ mängden är en fylld tetraeder



b) $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\text{enhetssfären}}$

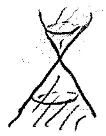
$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ ger åttondel av enhetssfären



mängden är bara ytan

c) Dela upp i två:

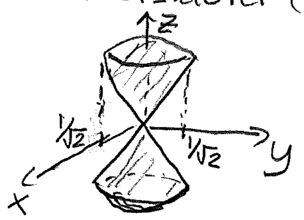
1. $x^2+y^2\leq z^2$, $x^2+y^2 \overset{\text{likhet}}{=} z^2$ är dubbelkon, $\leq$ ger fylld dubbelkon



2. $z^2\leq 1-x^2-y^2 \iff x^2+y^2+z^2\leq 1$ enhetsklotet (fyllt)

Vår mängd är snittet av dessa:

en dubbel fylld glasstrut med sfärisk topp



"Radien" där konen och sfären möts fås av

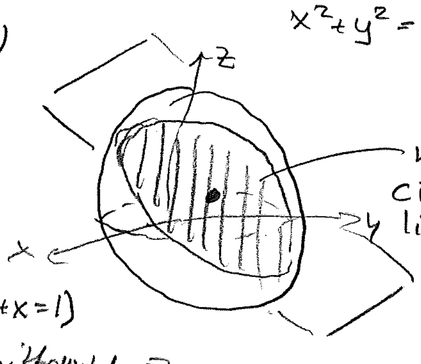
$z^2=\underbrace{1-x^2-y^2}_{\text{sfären}}=\underbrace{x^2+y^2}_{\text{konen}} \Rightarrow$

$x^2+y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$ radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $x^2+y^2+z^2\leq 1$ fyllda enhetsklotet (3D kropp)

$x+y+z=1$ plan (yta)

Dela en apelsin i 2 delar, snittytan blir en cirkelskiva.



mängden = cirkelskiva som ligger snett i $\mathbb{R}^3$

Symmetri ger mittpunkt $x=y=z=\frac{1}{3}$ $(x+x+x=1)$

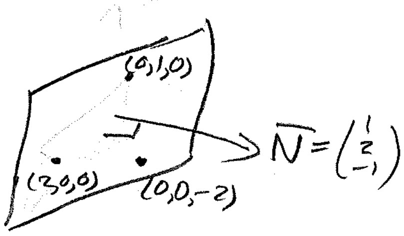
$(1,0,0)$ ligger på skivans kant, avstånd till mittpunkt är

$\sqrt{(1-\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ = cirkelskivans radie

1.12 a) $z = x+2y-2$

$\Leftrightarrow \; x+2y-z=2$ ett plan med normal $\bar{N} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

går genom $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,-2)$



b) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $z = x^2+y^2$

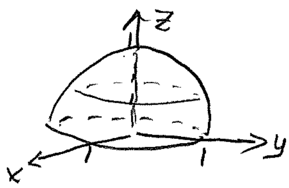
se video

d) $z = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow z^2 = 1-x^2-y^2$ med $z \geq 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$ med $z \geq 0$

$\Rightarrow$ övre halvan är enhetssfären

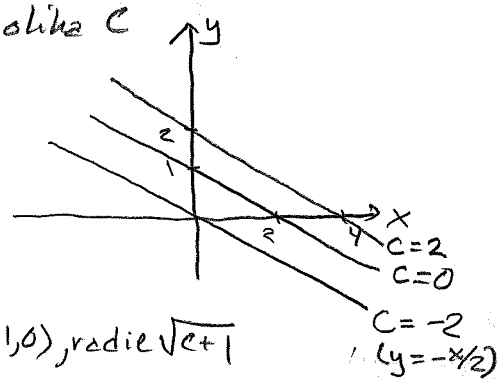
($z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ är undre halvan)



1.13 a) $f(x,y) = x+2y-2 = C$ är parallella linjer för olika C

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{2} + 1$$

$z = f(x,y)$ är planet $x+2y-z=2$ (1.12a)



b) $x^2+y^2-2x = C \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = C+1$, cirklar, mitt $(1,0)$, radie $\sqrt{C+1}$

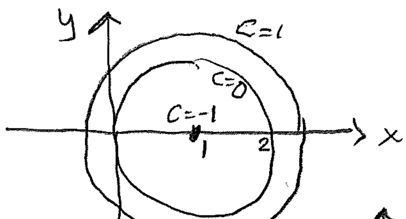
$C=-2$ ger inget

$C=-1$ ger bara punkten $(1,0)$

$C=0$ ger radie 1

$C=1$ radie $\sqrt{2}$

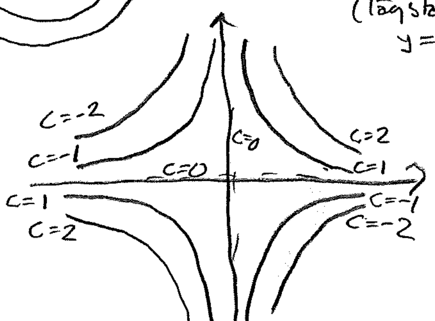
$C=2$ radie $\sqrt{3}$



$z = x^2+y^2-2x =$
$= (x-1)^2+y^2-1$
ger paraboloid i 3D
(lägsta punkt då $x=1$, $y=0 \Rightarrow z=-1$)

c) $xy = C$, $y = \frac{C}{x}$

$C=0$ ger $xy=0 \Rightarrow \underbrace{x=0 \text{ eller } y=0}_{\text{koord.axlarna}}$



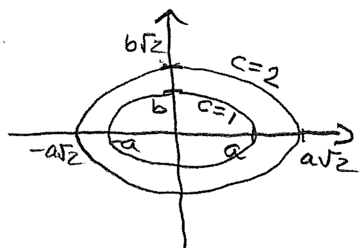
$z = xy$
ger hyperbolisk paraboloid i 3D
(sadelyta)

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C$ $(a>0, b>0)$ är ellipser om $C>0$

halvaxlar ($y=0 \Rightarrow x^2 = a^2C$) $a\sqrt{C}$ och $b\sqrt{C}$

$C=0 \Rightarrow$ bara origo

$C<0 \Rightarrow$ inga punkter



$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C$ ger

elliptisk paraboloid i 3D