4.2 Motivera: kompakt mängd & kontinuerlig funktion $\Rightarrow$ största och minsta värde finns

Undersök: inre punkter (stationära punkter)
randpunkter

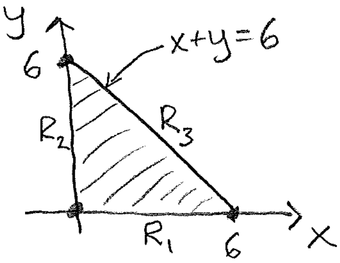
Kontrollera alltid att punkter tillhör mängden

Till slut: jämför funktionsvärden i hittade punkter (kandidater)

(andraderivator behövs ej beräknas)

Bilder på områden 4.2abce: (lösningar på följande sidor)

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 6 \end{cases}$

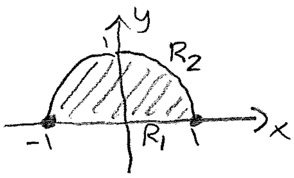


Sluten och begränsad $\Rightarrow$ kompakt mängd

Randbitar:

$\begin{cases} R_1: y=0, 0<x<6 \\ R_2: x=0, 0<y<6 \\ R_3: y=6-x, 0<x<6, \; f(x,y)= \\ \quad = f(x,6-x)=\ldots \\ \text{3 hörn}: (0,0), (6,0), (0,6) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

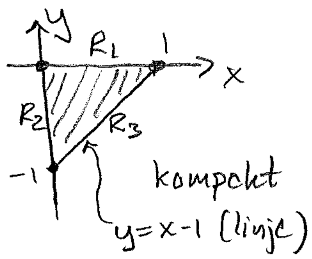


halv cirkelskiva
sluten och begränsad $\Rightarrow$ kompakt

Rand:

$\begin{cases} R_1: y=0, -1<x<1 \\ R_2: y=\sqrt{1-x^2}, -1<x<1, \text{alt. } (x,y)= \\ \quad =(\cos t, \sin t), 0<t<\pi \\ \text{2 hörn } (1,0), (-1,0) \end{cases}$

c) triangel, hörn i $(0,0), (1,0), (0,-1)$

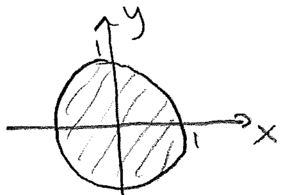


kompakt

Rand:

$\begin{cases} R_1: y=0, 0<x<1 \\ R_2: x=0, -1<y<0 \\ R_3: y=x-1, 0<x<1 \\ \text{3 hörn}: (0,0), (1,0), (0,-1) \end{cases}$

e) $x^2+y^2 \leq 1$



kompakt

Rand: $x^2+y^2=1$ (enhetscirkeln)

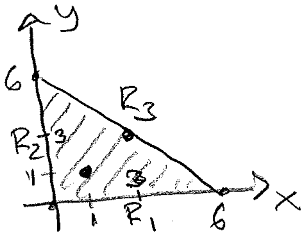
$(x,y)=(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$

$f(x,y)=f(\cos t, \sin t)=\ldots$

inga hörn

Lösningar 4.2

a) $f(x,y) = xy - x - y - 4$, $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6$



f kontinuerlig, mängden kompakt ⇒ största och minsta värde finns.

1. Inre punkter, sök stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = y - 1 = 0 \\ f'_y = x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,1) \text{ stationär. Tillhör mängden? Ja!}$$

$f(1,1) = 1-1-1-4 = \underline{\underline{-5}}$ kandidat (till att vara största eller minsta värde)

2. Rand

a) $R_1: y=0, 0<x<6 \Rightarrow f(x,y) = f(x,0) = x \cdot 0 - x - 0 - 4 = -x-4 = g(x)$, undersök lokala max/min av $g(x)$: $g'(x) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ inga kandidater på R_1 (hörnen tar vi senare)

b) $R_2: x=0, 0<y<6 \Rightarrow f(x,y) = f(0,y) = -y-4 = h(y)$, $h'(y) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ inga kandidater på R_2

c) $R_3: y = 6-x, 0<x<6, f(x,y) = f(x,6-x) = x(6-x) - x - (6-x) - 4 = -x^2+6x-10 = k(x)$

$k'(x) = -2x+6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$, ligger på R_3 $(0<x<6) \Rightarrow f(3,3) = 9-3-3-4 = \underline{\underline{-1}}$ kandidat

d) hörn (läs av f:s värden)
$$\left.\begin{aligned} f(0,0) &= -4 \\ f(6,0) &= -10 \\ f(0,6) &= -10 \end{aligned}\right\} \text{3 kandidater}$$

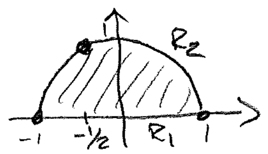
Jämför nu de 5 kandidaterna $-5, -1, -4, -10, -10$ (största och minsta värden finns garanterat bland dessa)

-1: störst; $-10, -10$: minst

Svar: Största värde $f(3,3) = -1$

Minsta värde $f(0,6) = f(6,0) = -10$

4.2b $f(x,y) = x^2+5y^2-4x$ $\quad \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$



f kontinuerlig, mängden kompakt $\Big\}$ ⇒ största och minsta värde existerar

1. Inre punkter $\begin{cases} f'_x = 2x-4=0 \\ f'_y = 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (2,0)$ utanför mängden. Inga kandidater i inre punkter.

2. Rand a) R_1 $y=0, -1<x<1 \Rightarrow f(x,y) = x^2-4x = g(x), g'(x) = 2x-4=0 \Rightarrow x=2$, utanför

b) R_2: $y=\sqrt{1-x^2}, -1<x<1 \Rightarrow f(x,y) = x^2+5(1-x^2)-4x = -4x^2-4x+5 = h(x), h'(x) = -8x-4=0 \Rightarrow$

$x=-1/2 \Rightarrow y = \sqrt{3}/2$ på R_2 $\Rightarrow f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4}+\frac{15}{4}+2 = \underline{6}$ kandidat

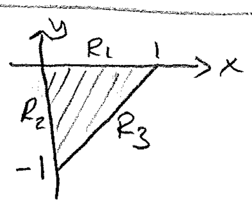
c) hörnen $f(1,0) = 1+0-4 = \underline{\underline{-3}}$, $f(-1,0) = 1+0+4 = \underline{\underline{5}}$ kandidater

Jämför 3 kandidater $6, -3, 5$ ⇒ Svar Största värde $f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 6$

störst minst

Minsta värde $f(1,0) = -3$

4.2c $f(x,y) = x^2-2xy+4y^2-2y$



f kontinuerlig, mängden kompakt $\Big\}$ ⇒ störst och minst värde existerar

1. Inre punkter

$\begin{cases} f'_x = 2x-2y = 0 \\ f'_y = -2x+8y-2=0 \end{cases}$ $\Rightarrow y=x$ $\Rightarrow 6x-2=0 \Rightarrow x=y=\frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ enda stationära punkt, utanför mängden

>0

2. Rand

a) R_1: $y=0, 0<x<1 \Rightarrow f(x,y) = f(x,0) = x^2 = g_1(x), g_1'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x=0$ utanför

(x=0 är i mängden men utanför $0<x<1$, vi tar med den som hörn senare)

b) R_2: $x=0, -1<y<0 \Rightarrow f(x,y) = f(0,y) = 4y^2-2y = g_2(y), g_2'(y) = 8y-2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}>0$ utanför

c) R_3: $y=x-1, 0<x<1 \Rightarrow f(x,y) = f(x,x-1) = x^2-2x(x-1)+4(x-1)^2-2(x-1) =$

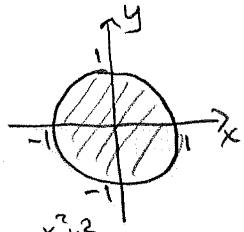
$= x^2-2x^2+2x+4x^2-8x+4-2x+2 = 3x^2-8x+6 = g_3(x), g_3'(x) = 6x-8=0 \Rightarrow$

$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} > 1$ utanför   inga kandidater hittills!

d) hörn blir 3 kandidater; $f(0,0) = \underline{\underline{0}}$, $f(1,0) = \underline{\underline{1}}$, $f(0,-1) = 4+2 = \underline{\underline{6}}$

Svar Största värde $f(0,-1) = 6$, minsta $f(0,0) = 0$

4.2e) $f(x,y) = (x+2y)e^{-x^2-y^2}$



$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1 \text{ kompakt} \\ f \text{ kontinuerlig} \end{array}\right\} \Rightarrow$ största och minsta värde existerar

1. Inre punkter

$$\begin{cases} f'_x = 1\cdot e^{-x^2-y^2} - 2x(x+2y)e^{-x^2-y^2} = (1-2x(x+2y))e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = 2\cdot e^{-x^2-y^2} - 2y(x+2y)e^{-x^2-y^2} = (2-2y(x+2y))e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \quad /e^{-x^2-y^2} \ne 0/$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x(x+2y) = 0 \quad (1) \\ 1-y(x+2y)=0 \quad (2) \end{cases} \quad (1)-(2) \Rightarrow (-2x+y)(x+2y) = 0 \Rightarrow y-2x=0 \text{ eller } \underbrace{x+2y=0}_{\text{går ej i (1) (eller (2))}}$$

$\Rightarrow y = 2x$, sätt in i (1) $\Rightarrow 1-2x\cdot(x+4x) = 0 \Rightarrow 10x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ och

$y = 2x = \pm\frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ stationära punkter.

De tillhör mängden: $x^2+y^2 = \frac{1}{10}+\frac{4}{10} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ de är kandidater:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{10}}\right)e^{-1/2} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{5}{2}}e^{-1/2}}}, \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}+\frac{-4}{\sqrt{10}}\right)e^{-1/2} = \underline{\underline{-\sqrt{\tfrac{5}{2}}e^{-1/2}}}$$

2. Rand, randen är enhetscirkeln $x^2+y^2=1$, parametrisera $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $\underbrace{0 \le t < 2\pi}_{\text{ett varv}}$

$f(\cos t, \sin t) = (\cos t + 2\sin t)e^{-1} = g(t)$

$g'(t) = (-\sin t + 2\cos t)e^{-1} = 0 \Rightarrow \underbrace{\sin t}_{y} = 2\underbrace{\cos t}_{x} \Rightarrow y = 2x$, insatt i $x^2+y^2=1$:

$x^2+4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt5}$, $y = 2x = \pm\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt5}+\frac{4}{\sqrt5}\right)e^{-1} = \underline{\underline{\sqrt5 e^{-1}}}$ och $f\left(\frac{-1}{\sqrt5}, \frac{-2}{\sqrt5}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt5}+\frac{-4}{\sqrt5}\right)e^{-1} = \underline{\underline{-\sqrt5 e^{-1}}}$ kandidater

Jämför 4 värden $\sqrt{\frac52}e^{-1/2}, -\sqrt{\frac52}e^{-1/2}, \sqrt5 e^{-1}, -\sqrt5 e^{-1}$

Vi har att $\sqrt{\frac52}e^{-1/2} = \sqrt{\frac52}e^{-1}\cdot e^{1/2} = \sqrt5 e^{-1}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{e}{2}}}_{>1} > \sqrt5 e^{-1} \Rightarrow$

Svar: Största värde $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{\frac52}e^{-1/2}$

Minsta värde $f\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac52}e^{-1/2}$