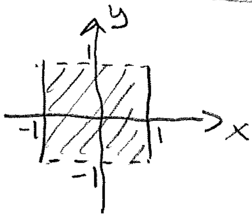
4.1 För att en kontinuerlig funktion säkert ska ha ett största och ett minsta värde på en mängd M så måste M vara kompakt.

Kompakt = sluten och begränsad

Om M inte är kompakt kan man försöka skapa en funktion f som saknar största eller minsta värde genom att låta f växa ut mot randen av M, eller växa då $|\bar{x}| \to \infty$ om M obegränsad.

---

a) $\begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$



M är ej sluten, övre och undre randdel tillhör ej $M \Rightarrow M$ ej kompakt

$f(x,y) = y$ saknar största och minsta värde i M (f kommer godtyckligt nära värdet 1 vid övre randen men blir aldrig $= 1$ i M, motsv. för värdet -1 vid undre randen)

b) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

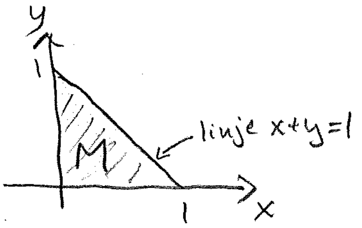
slutna enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$

kompakt mängd

[fyllt]

Kontinuerlig f har garanterat ett största och ett minsta värde i M

c) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 1 \end{cases}$



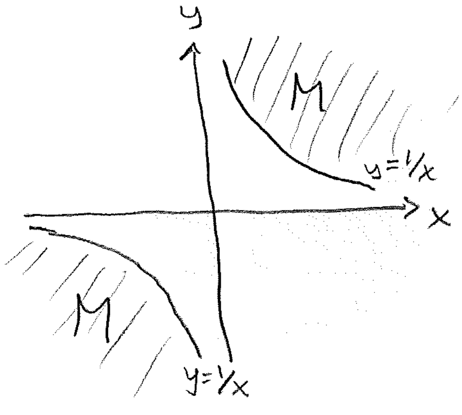
M är sluten och begränsad $\Rightarrow$ kompakt

Varje kontinuerlig f har ett största och ett minsta värde på M.

d) $xy \ge 1$ Rita kurvan $y = \frac{1}{x}$

M är obegränsad (men M är sluten: randen är kurvan $y = \frac{1}{x}$ som ingår i M)

$\Rightarrow M$ ej kompakt



Man kan välja f på väldigt många sätt så att den saknar största och minsta värde, t.ex. $f(x,y) = x$