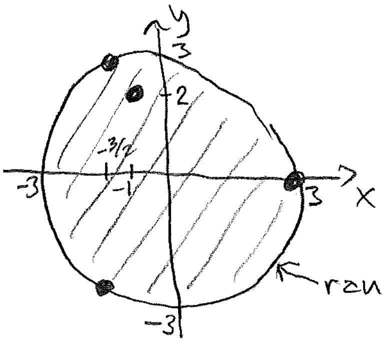
4.5 $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3y$, sök största och minsta värde då $x^2+y^2 \le 9$



Mängden är en slutencirkelskiva med mittpunkt $(0,0)$ och radie 3 $\Rightarrow$ kompakt

f är kontinuerlig $\Rightarrow$ har ett största och ett minsta värde i mängden

rand = cirkeln $x^2+y^2=9$

1. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 2x+y = 0 & (1) \\ f'_y = x+2y-3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow y=-2x$, in i (2) $\Rightarrow x-4x-3=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow (x,y)=(-1,2)$ enda stationära punkt

$(-1)^2+2^2=5<9 \Rightarrow$ inom mängden

$\Rightarrow \underline{f(-1,2)} = 1-2+4-6 = \underline{\underline{-3}}$ kandidat

2. Randpunkter

Parametrisera $(x,y) = (\underset{\uparrow \text{radien}}{3}\cos t, 3\sin t)$, $\underbrace{0 \le t < 2\pi}_{\text{ett varv}}$

[Med metoder från föreläsning 11 kan man se $g(x,y)=x^2+y^2=9$ som ett bivillkor.]

$\Rightarrow f(x,y) = f(3\cos t, 3\sin t) = \underbrace{9\cos^2 t + 9\cos t\sin t + 9\sin^2 t}_{=9} - 9\sin t = \underbrace{9+9\cos t\sin t - 9\sin t}_{\text{sätt } = g(t)}$

$g'(t) = -9\sin^2 t + 9\cos^2 t - 9\cos t = -9(1-\cos^2 t)+9\cos^2 t - 9\cos t = 18\cos^2 t - 9\cos t - 9 = 0$

$\Rightarrow \cos^2 t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}_{9/16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\cos t = 1$ eller $\cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow [x = 3\cos t]$ $x=3$ eller $x=-3/2$

$x=3 \Downarrow y=0$

$x=-3/2 \Downarrow y^2 = 9-x^2 = 9-\frac{9}{4} = \frac{27}{4} \Downarrow y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Tre kandidater [markeras i figuren]

$f(3,0) = \underline{\underline{9}}$

$f(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{9 - \frac{27\sqrt{3}}{4}}}$

$f(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{9 + \frac{27\sqrt{3}}{4}}}$

Jämför $\underbrace{-3}_{\text{minst}}$, 9, $9-\frac{27\sqrt{3}}{4}$, $\underbrace{9+\frac{27\sqrt{3}}{4}}_{\text{störst}}$

[$(9\sqrt{3})^2 = 243 < 256 = 16^2 \Rightarrow 9\sqrt{3} < 16 \Rightarrow 27\sqrt{3} < 48 \Rightarrow \frac{27\sqrt{3}}{4} < 12 \Rightarrow 9 - \frac{27\sqrt{3}}{4} > -3$]

Svar Största värde $f(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}) = 9 + \frac{27\sqrt{3}}{4}$

Minsta värde $f(-1,2) = -3$