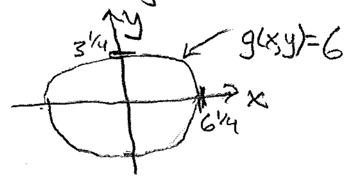
Tips 4.6, 4.8, 4.12, 4.15, 4.3b
(Lösningar på sidorna efter)

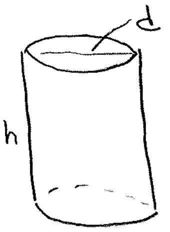
4.6 Avstånd mellan (0,0) och (x,y) är $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Istället för att söka största minsta värde av $d(x,y)$ kan man söka största/minsta värde av $f(x,y)=(d(x,y))^2=x^2+y^2$. Slipper då derivera rotuttryck.

$\underbrace{x^4+2y^4}_{g(x,y)}=6$ är bivillkor. Liknar en ellips men lite mer "kantig"

$y=0 \Rightarrow x=6^{1/4}$
$x=0 \Rightarrow y=3^{1/4}$



4.8

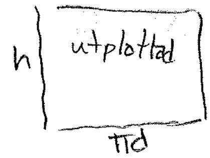


volym V_0

$V_0=\underbrace{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}_{\text{bottenarea}}\cdot h$ Total area $A(h,d)=\underbrace{\pi hd}_{\text{arean runt rektangel med sidor } \pi d \text{ och } h}+\underbrace{2\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}_{\text{lock och botten}}$

Sök minsta värde av $A(h,d)$ under bivillkoret

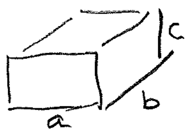
$$V(h,d)=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h=\underbrace{V_0}_{\text{någon konstant}}$$



($V(h,d)=V_0$ är en nivåkurva som inte är begränsad – man får motivera varför minsta värde finns)

4.12 Man söker största/minsta värde av $f(x,y,z)=xy+xz=x(y+z)$ under bivillkoret $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$ (vi är alltså på enhetssfären). Sök punkter där ∇f och ∇g parallella.

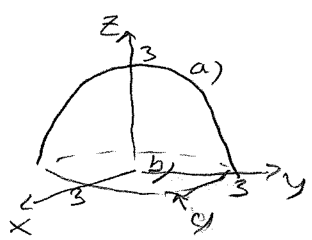
4.15



Låda utan lock. Total area $A(a,b,c)=ab+2ac+2bc$
Volym är $V(a,b,c)=abc$

Sök minsta värde av $A(a,b,c)$ då $\underbrace{V(a,b,c)=V_0}_{\text{bivillkor}}$. Behöver motivera varför minsta värde finns, bivillkoret definierar inte en kompakt mängd. Sedan ∇A och ∇V parallella ....

4.3b Största/minsta värde av $f(x,y,z)=3x+xy+z^2$ då $x^2+y^2+z^2\leq 9$, $z\geq 0$.



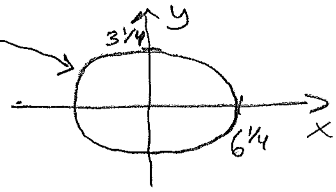
fyllt halvklot.

1. Inre punkter
2. Rand a) halvsfär $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=9$ bivillkor (och $z>0$)
   b) bottenplatta $h(x,y,z)=z=0$ bivillkor (och $x^2+y^2<9$)
   c) cirkel $\begin{cases} g(x,y,z)=9 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$ 2 bivillkor (eller parametrisering $(x,y,z)=(3\cos t, 3\sin t, 0)$)

inga "hörn"

Lösningar

4.6) Största/minsta värde av $f(x,y)=x^2+y^2$ (avstånd i kvadrat till origo) då $g(x,y)=x^4+2y^4=6$



Mängden är en kurva som är kompakt, f är kontinuerlig ⇒ största och minsta värde finns

Sök punkter på kurvan där ∇f och ∇g är parallella.

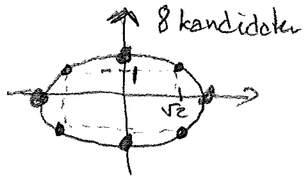
$\nabla f(x,y)=(2x,2y)$ parallella (linjärt beroende) om insatta i 2×2-determinant
$\nabla g(x,y)=(4x^3,8y^3)$ ger 0 (alt. $\nabla g = k\cdot\nabla f$):

$$0=\begin{vmatrix}2x & 4x^3\\ 2y & 8y^3\end{vmatrix} = 16xy^3-8x^3y = 8xy(2y^2-x^2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ eller } y=0 \text{ eller } x^2=2y^2$$

Insatt i $g=6$: $x=0 \Rightarrow 0+2y^4=6 \Rightarrow y^4=3 \Rightarrow y^2=\cancel{\pm}\sqrt{3} \Rightarrow y=\pm 3^{1/4}$

$\Rightarrow f(0,3^{1/4})=\sqrt{3}$ och $f(0,-3^{1/4})=\sqrt{3}$ kandidater

$y=0 \Rightarrow x^4+0=6 \Rightarrow x=\pm 6^{1/4} \Rightarrow f(6^{1/4},0)=\sqrt{6}$ och $f(-6^{1/4},0)=\sqrt{6}$ kandidater



$x^2=2y^2 \Rightarrow x^4=4y^4 \xRightarrow{\text{insatt i } g=6} 4y^4+2y^4=6 \Rightarrow y^4=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2}$ 4 punkter

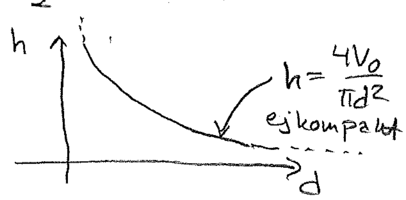
$\Rightarrow f(\sqrt{2},1)=f(\sqrt{2},-1)=f(-\sqrt{2},1)=f(-\sqrt{2},-1)=2+1=3$ kandidater

Jämför $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 3 \Rightarrow$ Största värde $f(\pm\sqrt{2},\pm 1)=3$ (i 4 punkter)
Minsta värde $f(0,\pm 3^{1/4})=\sqrt{3}$ (i 2 punkter)

Avstånd är $\sqrt{f}$ så störst avstånd är $\sqrt{3}$ (i 4 punkter) och minsta $3^{1/4}$ (i 2 punkter)

4.8)

(Största/)minsta värde av $A(h,d)=\pi hd+\frac{\pi}{2}d^2$ under bivillkoret $V(h,d)=\frac{\pi}{4}d^2h=V_0$.



$h\to 0 \Rightarrow d\to\infty \Rightarrow \frac{\pi}{2}d^2\to\infty \Rightarrow A\to\infty$

$d\to 0 \Rightarrow dh\to\infty\ [dh=\frac{4V_0}{d}] \Rightarrow \pi hd\to\infty \Rightarrow A\to\infty$ [att bara säga $h\to\infty$ då $d\to 0$ räcker inte för att fastslå $A\to\infty$]

Detta motiverar varför minsta värde finns men inte största. En väldigt låg och bred cylinder eller väldigt smal och hög får stor area för given volym V_0.

∇A parallell med ∇V ger $0=\begin{vmatrix}A'_h & V'_h\\ A'_d & V'_d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\pi d & \frac{\pi}{4}d^2\\ \pi h+\pi d & \frac{\pi}{2}dh\end{vmatrix}=\frac{\pi^2}{2}d^2h-\frac{\pi^2}{4}d^2(h+d)=$

$=\frac{\pi^2}{4}d^2(h-d) \Rightarrow \underset{\text{går ej i villkoret}}{d=0}$ eller $h=d$, $h=d$ i bivillkoret $\Rightarrow d^3=\frac{4V_0}{\pi} \Rightarrow d=\left(\frac{4V_0}{\pi}\right)^{1/3}$

$\Rightarrow$ minsta area då $h=d=\left(\frac{4V_0}{\pi}\right)^{1/3}$, då är $A=\pi\left(\frac{4V_0}{\pi}\right)^{2/3}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{4V_0}{\pi}\right)^{2/3}=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{4V_0}{\pi}\right)^{2/3}=3(2\pi V_0^2)^{1/3}$

4.12 Största/minsta värde av $f(x,y,z)=x(y+z)$ då $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$

f kont. och $g=1$ kompakt (enhetssfären) $\Rightarrow$ största och minsta värde existerar

Sök punkter på sfären där ∇f och ∇g parallella. Sätter $\nabla f \times \nabla g = \bar{0}$:

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \\ g'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x \\ x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz-2xy \\ 2x^2-2z(y+z) \\ 2y(y+z)-2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(y-z)=0 & (1) \\ x^2-z(y+z)=0 & (2) \\ y(y+z)-x^2=0 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow x=0$ eller $y=z$

$\underline{x=0}$ i (2) & (3) $\Rightarrow \begin{cases} z(y+z)=0 & (4) \\ y(y+z)=0 & (5) \end{cases} \Rightarrow z=0$ eller $y=-z \overset{g=1}{\Rightarrow} 0^2+(-z)^2+z^2=1 \Rightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$z=0 \Downarrow y=0$ går ej i $g=1$

$\left.\begin{array}{l} f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=0 \\ f(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=0 \end{array}\right\}$ 2 kandidater

$\underline{y=z}$ i (2) & (3) $\Rightarrow \begin{cases} x^2-2z^2=0 \\ 2z^2-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=2z^2$, in i $g=1 \Rightarrow 2z^2+z^2+z^2=1 \Rightarrow z^2=\frac{1}{4} \Rightarrow z=\pm\frac{1}{2}$

$z=\frac{1}{2} \Rightarrow y=z=\frac{1}{2},\ x^2=2z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}},\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

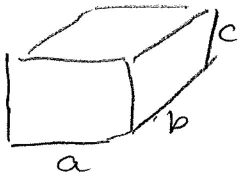
$z=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2},\ x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

4 kandidater här

Jfr 6 kandidater $0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

Största värde $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, minsta $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

4.15



Minimera $A(a,b,c)=ab+2ac+2bc$

då $V(a,b,c)=abc=V_0$ (bivillkor)

Om t.ex. $a\to 0$ måste $bc\to\infty$ p.g.a. bivillkor $\Rightarrow A\to\infty$, så om lådan görs extremt liten i någon riktning växer arean $\Rightarrow$ en minsta area finns.

Sök punkter där $\nabla A=(A'_a,A'_b,A'_c)=(b+2c,a+2c,2a+2b)$ och $\nabla V=(V'_a,V'_b,V'_c)=(bc,ac,ab)$ parallella

$$\nabla A\times\nabla V=\begin{pmatrix} b+2c \\ a+2c \\ 2a+2b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab(a+2c)-ac(2a+2b) \\ bc(2a+2b)-ab(b+2c) \\ ac(b+2c)-bc(a+2c) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0}}{\Longrightarrow} \begin{cases} ab-2ac=0 \\ 2bc-ab=0 \\ 2ac-2bc=0 \end{cases} \overset{\substack{a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0}}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow \begin{cases} b-2c=0 \\ 2c-a=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=2c$, sätt in i bivillkor $\Rightarrow 2c\cdot 2c\cdot c=V_0 \Rightarrow c=\left(\frac{V_0}{4}\right)^{1/3}$

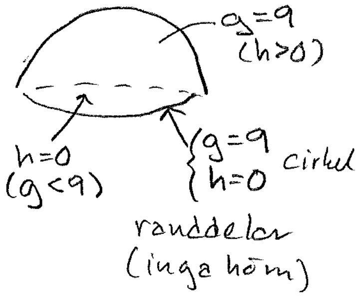
$\Rightarrow a=b=2c=2\left(\frac{V_0}{4}\right)^{1/3}=(2V_0)^{1/3}$ och $A=(2V_0)^{2/3}+(2V_0)^{2/3}+(2V_0)^{2/3}=3(2V_0)^{2/3}$

Minsta area då $a=b=(2V_0)^{1/3}$ och $c=\left(\frac{V_0}{4}\right)^{1/3}$, då är $A=3(2V_0)^{2/3}$

4.3 b Största/minsta värde av $f(x,y,z) = 3x + xy + z^2$ i kompakta halvklotet

$x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \geq 0$ Sätt $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$h(x,y,z) = z$



Mängd kompakt, f kontinuerlig $\Rightarrow$ största och minsta värde existerar

1. Inre punkter $\begin{cases} f'_x = 3+y = 0 \\ f'_y = x = 0 \\ f'_z = 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-3,0)$ ligger på randen (tas ej med här)

2. Rand

a) halvsfären $\begin{cases} g = 9 \\ h > 0 \end{cases}$ $\nabla f = (3+y, x, 2z)$ parallell $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla f = k \cdot \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 3+y = k \cdot 2x & (1) \\ x = k \cdot 2y & (2) \\ 2z = k \cdot 2z & (3) \end{cases} \Rightarrow k = 1$ ty $h = z > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3+y = 2x \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

[alt.: $\nabla f \times \nabla g = \bar{0}$]

$z^2 = 9 - x^2 - y^2 = 9 - 4 - 1 = 4 \Rightarrow z = (\pm)2$ $(h = z > 0)$ $\quad f(2,1,2) = 6+2+4 = 12$ kandidat

b) bottenplatta $\begin{cases} h = 0 \\ g < 9 \end{cases}$ ∇f parallell $\nabla h = (0,0,1)$; $\nabla f = k \nabla h \Rightarrow \begin{cases} 3+y = k \cdot 0 \\ x = k \cdot 0 \\ 2z = k \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow$

$y = -3,\ x = 0,\ z = \frac{k}{2}$ men $h = 0 \Rightarrow z = 0 = k$. Punkt $(0,-3,0)$ igen, har $g = 9$, ligger ej på denna del av randen utan på c) nedan.

c) cirkeln $\begin{cases} g = 9 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+0 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ linjärt beroende ger

$$0 = \begin{vmatrix} 3+y & 2x & 0 \\ x & 2y & 0 \\ 2z & 2z & 1 \end{vmatrix} = 2y(3+y) - 2x^2 \text{ in i } x^2+y^2 = 9 \Rightarrow y(3+y) + \overbrace{y^2}^{x^2} = 9 \Rightarrow y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{72}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ eller } y = -3 \ldots$$

$y = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} \underset{(z=0)}{\Longrightarrow} f\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4},\ f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{27\sqrt{3}}{4}$ kandidater

$y = -3 \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 = 0 \underset{(z=0)}{\Longrightarrow} f(0,-3,0) = 0$ kandidat

Jämför 4 kandidater: $\underbrace{12}_{\text{störst}},\ \frac{27\sqrt{3}}{4},\ \underbrace{-\frac{27\sqrt{3}}{4}}_{\text{minst}},\ 0$ $\quad \left[12 = 3 \cdot 4,\ \frac{27\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad 4^2 = 16,\ \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{243}{16} < \frac{256}{16} = 16 \right]$

Största värde $f(2,1,2) = 12$, minsta $f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{27\sqrt{3}}{4}$