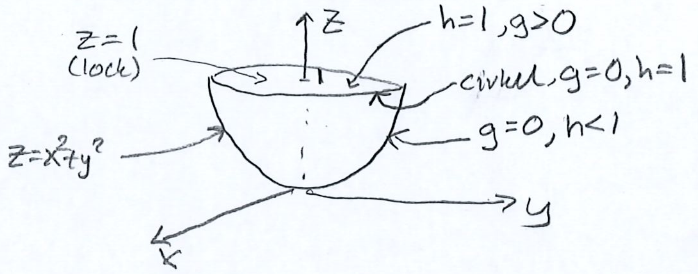
Tips & bilder 4.21, 4.22, 4.25 (därefter lösningar)

4.21 Mängden är $x^2+y^2 \le z \le 1$

$z = x^2+y^2$ är en paraboloid

$z = 1$ är ett horisontellt plan



Mängden är en "fylld kopp" och är kompakt.

$f(x,y,z) = x+y+z$ kont.

Sätt $g(x,y,z) = z-x^2-y^2$ och

$h(x,y,z) = z \Rightarrow$ Tre randdelar:

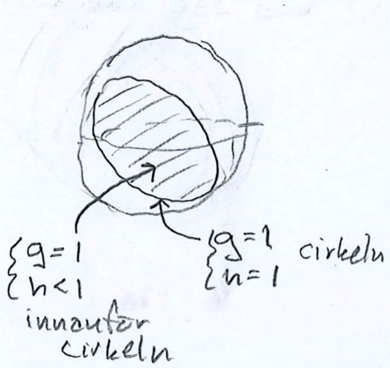
a) $\begin{cases} h=1 \\ g>0 \end{cases}$ $\nabla f, \nabla h$ parallella

b) $\begin{cases} g=0 \\ h<1 \end{cases}$ $\nabla f, \nabla g$ parallella c) $\begin{cases} g=0 \\ h=1 \end{cases}$ $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ linjärt beroende

(först kollas inre punkter!)

4.22 Mängden ges av $\begin{cases} x+y+z=1 & \text{ett plan} \\ x^2+y^2+z^2 \le 1 & \text{enhetsklotet} \end{cases}$

Skärning mellan snett liggande plan och enhetsklotet → cirkelskiva (som ligger "snett" i rummet)



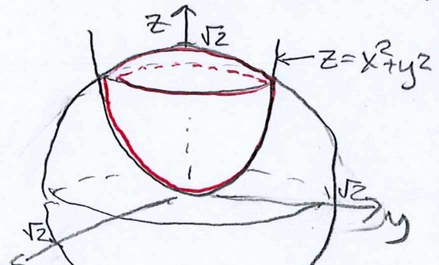
Sätt $g(x,y,z) = x+y+z$, $h(x+y+z) = x^2+y^2+z^2$

Mängden består då av två delar:

1. $\begin{cases} g=1 \\ h<1 \end{cases}$ cirkelskivan utan sin yttersta kant 2. $\begin{cases} g=1 \\ h=1 \end{cases}$ cirkeln som är kant på cirkelskivan

(mängden har alltså ingen volym, den är en 2-dim yta ⇒ inga inre punkter att undersöka)

4.25 Mängden ges av $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 2 & \text{klot, radie } \sqrt{2} \\ x^2+y^2 \le z & \text{inuti paraboloid} \end{cases}$

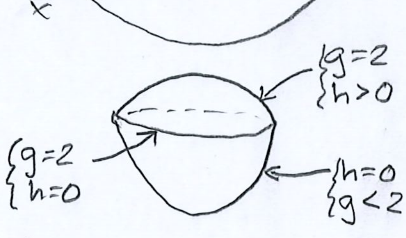


Mängden liknar den i 4.21, samma undertill men nu med sfäriskt topp (istället för platt lock).

Sätt $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $h(x,y,z) = z-x^2-y^2 \Rightarrow$

1. Inre punkter $\begin{cases} g<2 \\ h>0 \end{cases}$ 2a. Undre rand $\begin{cases} h=0 \\ g<2 \end{cases}$

2b. Sfärisk topp $\begin{cases} g=2 \\ h>0 \end{cases}$ 2c. Cirkel $\begin{cases} g=2 \\ h=0 \end{cases}$



$f(x,y,z) = 2x-2y+z$

1. $\nabla f = \bar{0}$, 2a. $\nabla f, \nabla h$ parallella, 2b. $\nabla f, \nabla g$ parallella

2c. $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ linjärt beroende

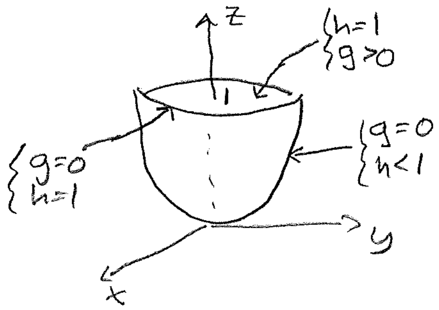
[Cirkelns radie? Skärning mellan ytor ⇒

$z = \underbrace{x^2+y^2}_{R^2} = \sqrt{2-x^2-y^2} = \sqrt{2-R^2}$

$\Rightarrow R^4 = 2-R^2 \Rightarrow R = 1 = \text{radien}$]

Lösningar

4.21 Största/minsta värde av $f(x,y,z)=x+y+z$ då $x^2+y^2\le z\le 1$.



$\begin{cases} f \text{ är kontinuerlig} \\ \text{mängden är kompakt (fylld sluten "kopp")} \end{cases} \Rightarrow$ största och minsta värde existerar

Sätt $g(x,y,z)=z-x^2-y^2$, $h(x,y,z)=z$

1. Inre punkter $\begin{cases} f'_x=1=0 \\ f'_y=1=0 \\ f'_z=1=0 \end{cases}$ saknar lösning $\Rightarrow$ inga stationära punkter ($\Rightarrow$ inga kandidater bland inre punkter)

2. Rand

a. Locket $\begin{cases} h=1 \\ g>0 \end{cases}$ Sök punkter där $\nabla f=(1,1,1)$ och $\nabla h=(h'_x,h'_y,h'_z)=(0,0,1)$ parallella. ∇f och ∇h är konstanta och ej parallella $\Rightarrow$ Inga kandidater här

b. Böjdaytan $\begin{cases} g=0 \\ h<1 \end{cases}$ $\nabla f=(1,1,1)$ och $\nabla g=(g'_x,g'_y,g'_z)=(-2x,-2y,1)$ parallella. Båda har 3:e komponent $=1 \Rightarrow$ 1:a och 2:a komp måste också vara lika $\Rightarrow \begin{cases} -2x=1 \\ -2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/2 \\ y=-1/2 \end{cases} \Rightarrow$

$\underset{\substack{\uparrow \\ g=0}}{z}=x^2+y^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ kandidat

c. Cirkeln $\begin{cases} g=0 \\ h=1 \end{cases}$ $\nabla f,\nabla g,\nabla h$ linjärt beroende

$$0=\begin{vmatrix} 1 & -2x & 0 \\ 1 & -2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2y+2x \Rightarrow y=x, \text{ in i } z=x^2+y^2=1 \text{ ger } 2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=y$$

Två kandidater $f(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},1)=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}+1=\sqrt2+1$, $f(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},1)=-\sqrt2+1$

Jämför $-\frac{1}{2},\sqrt2+1,-\sqrt2+1 \Rightarrow$ Största värde $f(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},1)=\sqrt2+1$, minsta $f(-\frac12,-\frac12,\frac12)=-\frac12$

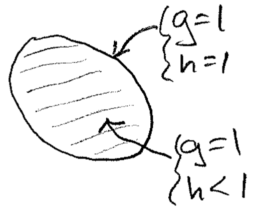
Obs att andra metoder finns. I 2c kan cirkeln skrivas $(x,y,z)=(\cos t,\sin t,1) \Rightarrow$ $f(\cos t,\sin t,1)=\cos t+\sin t+1=k(t)$, $k'(t)=-\underbrace{\sin t}_{y}+\underbrace{\cos t}_{x}=0 \Rightarrow y=x$ etc. in i $z=x^2+y^2=1$ ger samma som ovan.

I 2a kan $z=1$ sättas in: $f(x,y,1)=x+y+1=\ell(x,y)$, sök max/min (2-var. funktion)

$\begin{cases} \ell'_x=1=0 \\ \ell'_y=1=0 \end{cases}$ saknar lösning

4.22 Största minsta värde av $f(x,y,z) = xyz$

då $\underbrace{x+y+z=1}_{g(x,y,z)}$, $\underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 1}_{h(x,y,z)}$



Mängden är kompakt (en 2D cirkelskiva i $\mathbb{R}^3$, alla punkter är randpunkter, ingen "volym" så inga inre punkter)
f är kontinuerlig så största och minsta värde finns.

Vi måste undersöka två delar 1. $\begin{cases} g=1 \\ h<1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} g=1 \\ h=1 \end{cases}$

1. $\nabla f = (yz, xz, xy)$ och $\nabla g = (1,1,1)$ parallella, $\nabla f = k \nabla g \Rightarrow$

$$\begin{cases} yz = k \cdot 1 \\ xz = k \cdot 1 \\ xy = k \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow yz = \underbrace{xz = xy}_{\Rightarrow\ x=0 \text{ eller } y=z}$$

$x=0 \Rightarrow yz = 0 \Rightarrow y=0$ eller $z=0$
$\Downarrow g=1$: $z=1$; $\Downarrow g=1$: $y=1$

2 punkter $\underbrace{(0,0,1), (0,1,0)}_{\text{ger } h=1 \Rightarrow \text{utanför (är på cirkeln)}}$

$y=z \underset{yz=xy}{\Longrightarrow} y^2 = xy \Rightarrow y=0$ eller $y=x$

$y=0 \Downarrow z=0 \Downarrow g=1$: $x=1$ utanför (ger $h=1$)

$y=x \Downarrow x=y=z \Downarrow g=1$: $x=y=z=\frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{1}{3} < 1$ OK, på skivan

$$f(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = \frac{1}{27} \text{ kandidat}$$

[mittpunkt faktiskt]

2. $\nabla f, \nabla g$ och $\nabla h = (2x,2y,2z)$ linjärt beroende

$$0 = \begin{vmatrix} yz & 1 & 2x \\ xz & 1 & 2y \\ xy & 1 & 2z \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -\text{rad } 1 \\ -\text{rad } 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} yz & 1 & 2x \\ (x-y)z & 0 & 2(y-x) \\ (x-z)y & 0 & 2(z-x) \end{vmatrix} = 2(y-x)(x-z)y - 2\underbrace{(z-x)(x-y)}_{=(x-z)(y-x)}z =$$
$$= 2(y-x)(x-z)(y-z) \Rightarrow$$

$x=y$ eller $x=z$ eller $y=z$

$x=y$ i $\begin{cases} g=1 \\ h=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=1 \\ 2x^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow z = 1-2x \Rightarrow 2x^2+(1-2x)^2 = 1 \Rightarrow 6x^2-4x=0$
$\Rightarrow 2x(3x-2)=0 \Rightarrow x=0$ eller $x=2/3$
$x=0 \Downarrow z=1$; $x=2/3 \Downarrow z=1-4/3=-1/3$

2 punkter $(0,0,1)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$

På exakt samma sätt ger $x=z$ $(0,1,0)$ och $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ och $y=z$ ger $(1,0,0)$ och $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ $\Rightarrow$ 6 kandidater här

$f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = 0$, $f(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = f(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = f(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{27}$

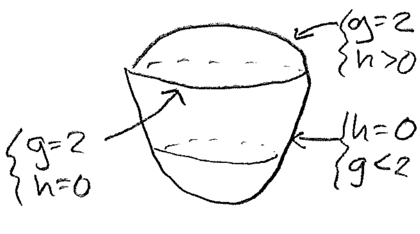
Jämför $\frac{1}{27}, 0, -\frac{4}{27} \Rightarrow$

Största värde $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$, minsta $-\frac{4}{27}$ i 3 punkter

4.25 Största/minsta värde av $f(x,y,z) = 2x-2y+z$

då $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y,z)} \leq 2$ och $x^2+y^2 \leq z$

$\iff \underbrace{z-x^2-y^2}_{h(x,y,z)} \geq 0$



$\left.\begin{matrix} f \text{ kontinuerlig} \\ \text{mängd kompakt} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ största och minsta värde finns

1. Inre punkter

$$\begin{cases} f'_x = 2 = 0 \\ f'_y = -2 = 0 \\ f'_z = 1 = 0 \end{cases}$$ saknar lösning $\Rightarrow$ inga stationära punkter

2. Rand

a) undre rand $\begin{cases} h=0 \\ g<2 \end{cases}$ $\nabla f = (2,-2,1)$ och $\nabla h = (-2x,-2y,1)$ parallella

$$\nabla h = k \cdot \nabla f \Rightarrow \begin{cases} -2x = k\cdot 2 \\ -2y = k\cdot(-2) \\ 1 = k\cdot 1 \Rightarrow k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 2 \\ -2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=-1, y=1}_{(h=0\Rightarrow)\ z=x^2+y^2=2} \Rightarrow (x,y,z)=(-1,1,2)$$

$\Downarrow$

$g = 1+1+4 = \underline{6 > 2}$

$\Rightarrow$ utanför

inga kandidater

b) topp $\begin{cases} g=2 \\ h>0 \end{cases}$ $\nabla f = (2,-2,1)$ och $\nabla g = (2x,2y,2z)$ parallella

$$\nabla g = k\cdot\nabla f \Rightarrow \begin{cases} 2x = k\cdot 2 \\ 2y = k\cdot(-2) \\ 2z = k\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=-k \\ z=k/2 \end{cases} \text{ in i } g=2 \Rightarrow k^2+(-k)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{9}{4}k^2 = 2$$

$\Rightarrow k^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $z>0$ gör att $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ stryks $\Rightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$

$(x,y,z) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, kontroll $h = z-x^2-y^2 = \frac{2}{9}-\frac{8}{9}-\frac{8}{9} \underset{\sim}{<0} \Rightarrow$ utanför

inga kandidater

[Inga kandidater hittills men största och minsta värde finns så vi måste hitta minst två kandidater i 2c).]

c) $\begin{cases} h=0 \\ g=2 \end{cases}$ $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ linjärt beroende $0 = \begin{vmatrix} 2 & 2x & -2x \\ -2 & 2y & -2y \\ 1 & 2z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2x & 0 \\ -2 & 2y & 0 \\ 1 & 2z & 1+2z \end{vmatrix} = (1+2z)(4y+4x)$

$\Rightarrow \underbrace{z=-1/2}_{\text{går ej } z>0 \text{ i mängden}}$ eller $\underset{\sim}{y=-x}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} h=0 \\ g=2 \end{pmatrix} \begin{cases} 2x^2 = z \\ 2x^2+z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 2-z^2 \Rightarrow z^2+z-2=0 \Rightarrow z=1$ eller $\underbrace{z=-2}_{\text{utanför ty } z\geq 0}$

Alltså $z=1 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $y=-x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ två kandidater

$$\underbrace{f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}+1 = 1+2\sqrt{2}}_{\text{största värde}}, \quad \underbrace{f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{2}+1 = 1-2\sqrt{2}}_{\text{minsta värde}}$$