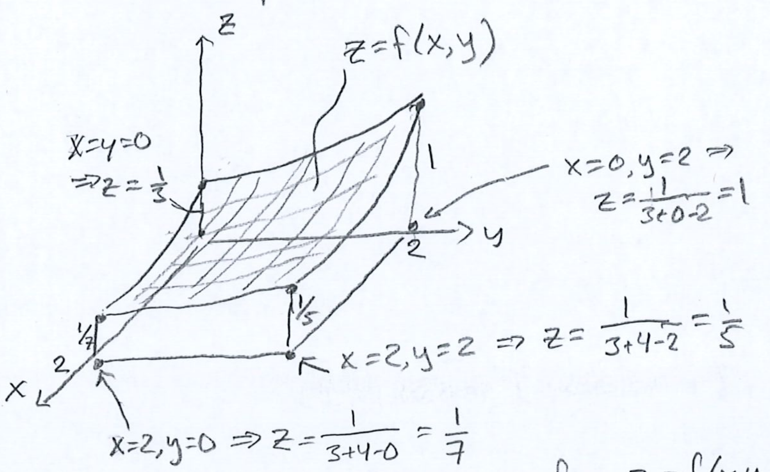
Lösning 6.1

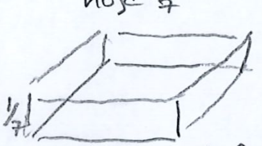
Vi ska uppskatta värdet på $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{3+x^2-y}$, $D: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$, genom att jämföra med volymer under staplar

Skiss av $f(x,y)=\frac{1}{3+x^2-y}$:

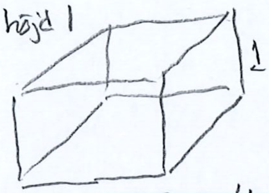
Det kan vara svårt rita en bra bild men det som behövs är att f avtar då x ökar (framåt i skissen) och växer då y ökar (till höger i skissen)



Ger att $f_{min}=\frac{1}{7}$ och $f_{max}=1$ på D. I är volymen mellan grafen $z=f(x,y)$ och xy-planet ovanför D. Vi kan jämföra den med volym av två lådor



volym $= \underbrace{2\cdot 2}_{\text{basarea}}\cdot\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$

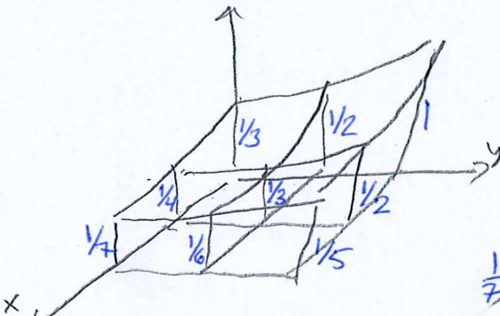


volym $=2\cdot 2\cdot 1=4$

Grafen ligger mellan dessa höjder

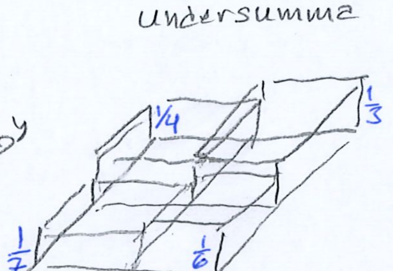
$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{7}\le I\le 4}$$

Om D delas upp i 4 mindre kvadrater med sida 1 kan vi lägga 4 staplar under eller över grafen och jämföra volymer



lägsta höjd på varje mindre kvadrat i främre vänstra hörn, högst i bakre högra hörn

undersumma

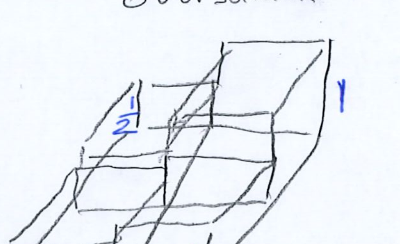


4 staplar under grafen, höjder markerade

Total volym

$\frac{1}{7}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 1=\ldots=\frac{75}{84}=\frac{25}{28}$

översumma



4 staplar ovanför grafen

Total volym

$\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+1\cdot 1=\frac{7}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{25}{28}\le I\le\frac{7}{3}}$$

[Att approximera med staplar är en vanlig metod vid numeriska beräkningar av integraler, liksom att definitionen av integral bygger på att I kan stängas in i mindre och mindre intervall. I övningarna kommer vi, liksom i envariabeln, använda primitiva funktioner för exakta beräkningar]