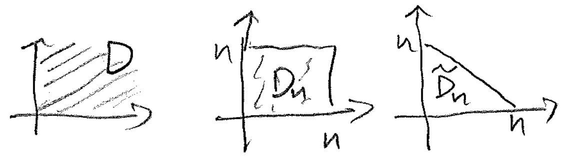
6.43, K5, 6.45, (6.48)

Tips Allmänt, om $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ generaliserad, om $f(x,y)$ inte växlar tecken i D så kan man räkna på "som vanligt". Kommentera därför alltid om t.ex. $f(x,y) \geq 0$ i D.
Divergens kan upptäckas vid integrering redan i första variabeln (man behöver inte räkna mer då) eller i andra variabeln, gäller också om man bytt variabler.

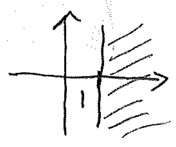
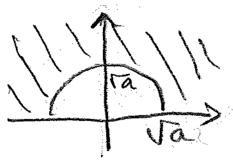
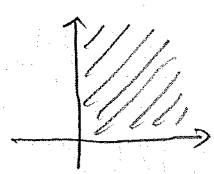
6.43 $\iint_D e^{-x-y}\,dxdy$ $\quad D: \begin{cases} 0 \leq x < \infty \\ 0 \leq y < \infty \end{cases}$



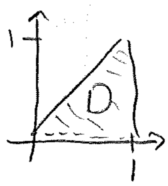
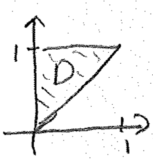
I a) beräknas $\iint_{D_n} e^{-x-y}\,dxdy$ och i b) $\iint_{\tilde{D}_n} e^{-x-y}\,dxdy$

I c) ska $I = \iint_D e^{-x-y}\,dxdy$ beräknas, eftersom $e^{-x-y} > 0$ i D kommer båda gränsvärdena i a) och b) då $n \to \infty$ gå mot I.

K5 obegränsade mängder $\Rightarrow$ generaliserade integraler, men positiva funktioner

a)  b)  c) 

I b) rekommenderas polära koordinater
I a) och c), räkna med x och y.

6.45 $\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$ a)  b) 

$\uparrow$ division med y som är 0 på randen $\Rightarrow$ generaliserad

$\frac{x}{y} \geq 0$ i mängderna $\Rightarrow$ bara att räkna på

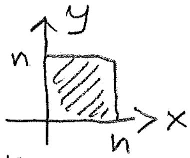
(**6.48** $-x^2 - xy - y^2 = -(x+\frac{y}{2})^2 - \frac{3}{4}y^2 = -(x+\frac{y}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}y}{2})^2$

Gör variabelbyte $\begin{cases} u = x + \frac{y}{2} \\ v = \frac{\sqrt{3}y}{2} \end{cases}$ (linjärt, $\mathbb{R}^2_{x,y}$ avbildas på hela $\mathbb{R}^2_{u,v}$)

Sedan polära koordinater)

Lösningar

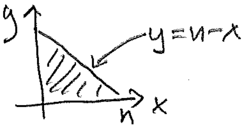
6.43 a) $D_n: \begin{cases} 0\le x\le n \\ 0\le y\le n\end{cases}$



$$I_n = \iint_{D_n} e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^n e^{-x}\Big(\int_0^n e^{-y}dy\Big)dx = \int_0^n e^{-x}\big[-e^{-y}\big]_0^n dx = \int_0^n e^{-x}(\underbrace{-e^{-n}+1}_{\text{konstant}})dx =$$

$$= (1-e^{-n})\big[-e^{-x}\big]_0^n = (1-e^{-n})(1-e^{-n}) = (1-e^{-n})^2$$

b) $\tilde D_n: \begin{cases}0\le x\le n\\ 0\le y\le n-x\end{cases}$



$$\tilde I_n = \iint_{\tilde D_n} e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^n e^{-x}\Big(\int_0^{n-x} e^{-y}dy\Big)dx =$$

$$= \int_0^n e^{-x}\big[-e^{-y}\big]_0^{n-x}dx = \int_0^n e^{-x}(-e^{x-n}+1)dx = \int_0^n (e^{-x}-e^{-n})dx = \big[-e^{-x}-e^{-n}x\big]_0^n = -e^{-n}-ne^{-n}+e^0+0 =$$

$$= 1-(n+1)e^{-n}$$

c) $I=\iint_D e^{-x-y}\,dx\,dy$ $\quad D: \begin{cases}0\le x<\infty\\0\le x<\infty\end{cases}$, $e^{-x-y}>0$ i D så både I_n och $\tilde I_n$

från a) och b) går mot I då $n\to\infty$

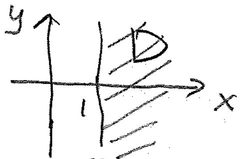
$I_n = (1-e^{-n})^2 \to (1-0)^2=1,\ n\to\infty$, $\quad \tilde I_n = 1-\frac{n+1}{e^n}\to 1-0=1,\ n\to\infty$ $\quad\Rightarrow I=1$ (konvergent)

Kan också beräkna I enligt följande (ty $e^{-x-y}>0$ i D):

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-x}\Big(\int_0^\infty e^{-y}dy\Big)dx = \int_0^\infty e^{-x}\big[-e^{-y}\big]_0^\infty dx = \int_0^\infty e^{-x}\Big(\underbrace{-\lim_{b\to\infty}e^{-b}}_{=0}+1\Big)dx =$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}dx = \big[-e^{-x}\big]_0^\infty = \underbrace{-\lim_{a\to\infty}e^{-a}}_{=0}+1 = 1$$

K5a) $I=\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2(1+y^2)}$ $\quad D:\begin{cases}1\le x<\infty\\ -\infty<y<\infty\end{cases}$

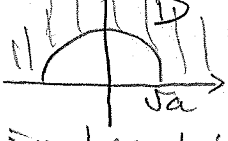


$\frac{1}{x^2(1+y^2)}>0$ i D $\Rightarrow$ kan räkna på som vanligt

$$I=\int_{-\infty}^\infty\Big(\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+y^2)}\Big)dy = \int_{-\infty}^\infty\Big[\frac{-1}{x}\Big]_1^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \int_{-\infty}^\infty\Big(\underbrace{\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{b}}_{=0}+1\Big)\frac{dy}{1+y^2} = \int_{-\infty}^\infty\frac{dy}{1+y^2} = \big[\arctan y\big]_{-\infty}^\infty =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\arctan A - \lim_{B\to-\infty}\arctan B = \frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \underline{\pi}$$ (konvergent) [går också bra börja med y]

K5b) $I=\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$, $\quad D:\begin{cases}y\ge0\\x^2+y^2\ge a>0\end{cases}$



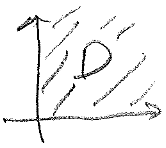
$\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\ge0$ i D $\Rightarrow$

kan räkna på, och byta till polära koord: $\sqrt a\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi\le\pi$

$$I=\int_0^\pi\int_{\sqrt a}^\infty \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^4}\underbrace{\rho}_{\text{determinant}}\, d\rho\, d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi\Big(\int_{\sqrt a}^\infty\frac{d\rho}{\rho^2}\Big)d\varphi = \int_0^\pi\sin\varphi\Big[-\frac1\rho\Big]_{\sqrt a}^\infty d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi\Big(\underbrace{\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{b}}_{=0}+\frac{1}{\sqrt a}\Big)d\varphi =$$

$$=\frac{1}{\sqrt a}\big[-\cos\varphi\big]_0^\pi = \frac{1}{\sqrt a}(1+1) = \underline{\frac{2}{\sqrt a}}$$ (konvergent)

K5c] $I = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$ $\quad D: \begin{cases} 0 \le x < \infty \\ 0 \le y < \infty \end{cases}$

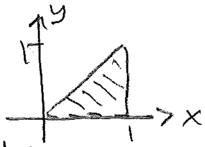


$\frac{1}{(1+x+y)^2} > 0$ i D $\Rightarrow$ bara att räkna på

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dy}{(1+x+y)^2} \right) dx = \int_0^\infty \left[\frac{-1}{1+x+y} \right]_{y=0}^\infty dx = \int_0^\infty \Big(\underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{-1}{1+x+b}}_{=0} + \frac{1}{1+x+0} \Big) dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln|1+x| \Big]_0^\infty = \lim_{b\to\infty} \big(\underbrace{\ln(1+b)}_{\to\infty \text{ då } b\to\infty} - \underbrace{\ln 1}_{=0} \big)$$ existerar ej $\Rightarrow$ I divergent

6.45a] $I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy$ $\quad D: 0 < y \le x \le 1$



$\frac{x}{y} \ge 0$ i D $\Rightarrow$ räkna på

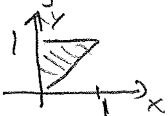
$D: \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ 0 < y \le x \end{cases}$ (*) eller $\begin{cases} 0 < y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$ (**)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} I = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x}{y} dy \right) dx = \int_0^1 x \Big[\ln|y| \Big]_0^x dx = \int_0^1 x \big(\ln x - \underbrace{\overbrace{\lim_{a\to 0^+} \ln a}^{\to -\infty}}_{\text{existerar ej}} \big) dx \Rightarrow \text{divergent}$$

Alternativt med (**) $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{x}{y} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2y} - \frac{y}{2} \right) dy =$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \underbrace{\ln 1}_{0} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{a\to 0^+} \ln a}_{\text{existerar ej}} + 0 \Rightarrow \text{divergent}$$

6.45b] $I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy$ $\quad D: 0 \le x \le y \le 1,\ y > 0$



$\frac{x}{y} \ge 0$ i D $\Rightarrow$ räkna på

$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$ ger $I = \int_0^1 \left(\int_0^y x dx \right) \frac{dy}{y} = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y \frac{dy}{y} = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - 0 \right) \frac{dy}{y} = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$ konvergent

[Behövde inte beräkna något gränsvärde! Beror på att $0 \le x \le y$ i D $\Rightarrow \frac{x}{y} \le 1$ i D
$\Rightarrow$ funktionen begränsad $\Rightarrow$ faktiskt inte generaliserad integral]

(**6.48]** $I = \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-x^2-xy-y^2}}_{>0 \text{ på hela } \mathbb{R}^2} dxdy$ $\Rightarrow$ räkna på

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2$$

Variabelbyte $\begin{cases} u = x + \frac{y}{2} \\ v = \frac{\sqrt{3}y}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ · linjärt byte (med determ. $\neq 0$) avbildar $\mathbb{R}^2$ på hela $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} \underbrace{\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|}_{2/\sqrt{3}} dudv = \Big/ \begin{matrix} \text{polära koord.} \\ 0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{matrix} \Big/ = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \cdot \underset{\text{determinant}}{\rho}\, d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^\infty d\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2}\right)}_{=0} + \frac{1}{2} e^0 \Big) d\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(konvergent))