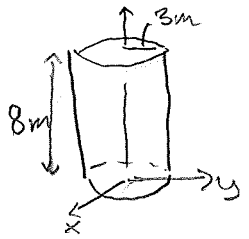
Bilder, tips & lösningar 6.40, 6.36, 6.33, 6.39

$\underbrace{\text{Bilder, tips}}_{\text{först}}$ & $\underbrace{\text{lösningar}}_{\text{därefter}}$

6.40 massdensitet i cylindrisk silo $f(h,\rho)=(10-h)^2(4-\rho)$ [kg/m³]

h = avstånd i höjdled från botten, ρ = avstånd från mittaxel



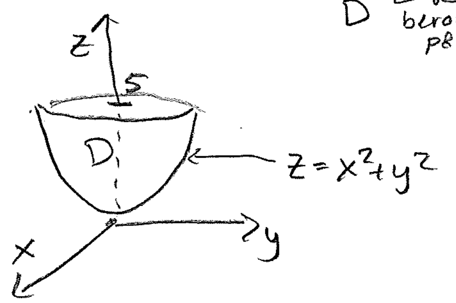
$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ vanliga ρ från polära koordinater i xy-led

h = vanliga z

silon är $\begin{cases} 0\le\rho\le 3 \\ 0\le h\le 8 \\ 0\le\varphi<2\pi \end{cases}$, φ = vanliga vinkeln i polära koord.

massan är $m=\iiint_D \underbrace{f(h,\rho)}_{\text{beror ej på }\varphi}\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dh$ ← determinant $\left|\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)}\right|=\rho$ i xy-led

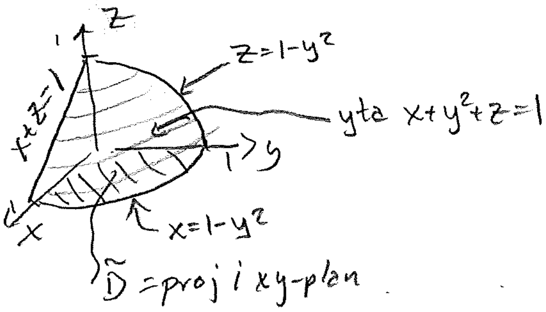
6.36



Volym av glaset är $\iiint_D 1\, dx\,dy\,dz$

$D:\ x^2+y^2\le z\le 5$ (polära koord. i xy-led rekommenderas)

6.33 $D:\ x+y^2+z=1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

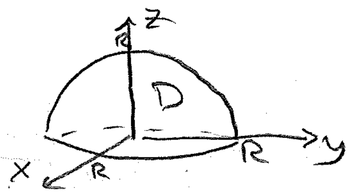


a) volym < volym av kub med sida 1

b) $V=\iiint_D 1\, dx\,dy\,dz$

D kan t.ex. skrivas $\begin{cases} 0\le z\le 1-x-y^2 \\ 0\le x\le 1-y^2 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$ $\Big\}\ \tilde{D}$ (proj i xy-plan)

6.39 Man kan placera halvklotet t.ex. som



I a) är massdensiteten $f(x,y,z)=\rho$ = konstant

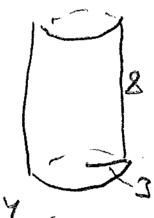
I b) är $f(x,y,z)=\underbrace{k}_{\text{konstant}}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\text{avstånd till origo}}=k\cdot r$

I rymdpolära koord: $E: \begin{cases} 0\le r\le R \\ 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le\varphi<2\pi \end{cases}$ övre halvklot

Massan $m=\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Lösningar

6.40 $f(h,\rho) = (10-h)^2(4-\rho)$ i koordinater $\underbrace{\rho,\varphi}_{\text{polära för } x,y},\ \underbrace{h}_{h=z}$



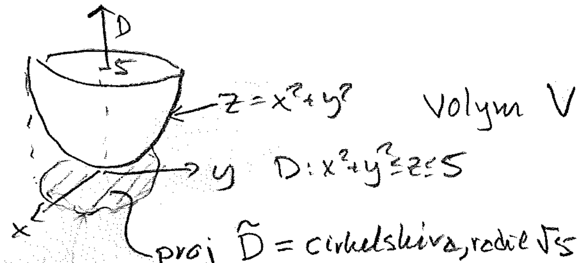
Silon: $\begin{cases} 0 \le h \le 8 \\ 0 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$

determinant då x,y byts mot ρ,φ

$$\text{Massa } m = \iiint_D (\text{massdensitet})\,dx\,dy\,dz = \int_0^8\int_0^{2\pi}\int_0^3 (10-h)^2(4-\rho)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dh =$$

$$= \int_0^8\int_0^{2\pi} \underbrace{\left[2\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^3}_{18-9} (10-h)^2\,d\varphi\,dh = 9\int_0^8 [\varphi]_0^{2\pi}(10-h)^2\,dh = 18\pi\left[-\frac{(10-h)^3}{3}\right]_0^8 = \frac{18\pi}{3}\left(-2^3+10^3\right) = 6\pi\cdot 992 =$$
$$= 5952\pi \ [\text{kg}]$$

6.36

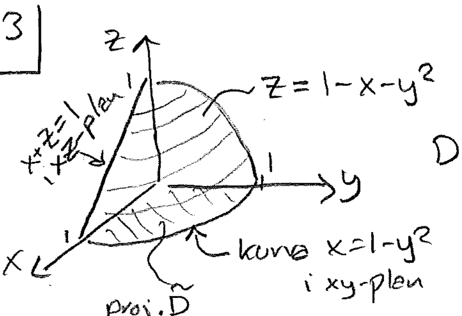


$$\text{Volym } V = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{\tilde D}\left(\int_{x^2+y^2}^{5} dz\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_{\tilde D}(5-x^2-y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{l}\text{polära koord.} \\ 0 \le \rho \le \sqrt5,\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ \frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \rho\end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt5}(5-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[5\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt5} d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4}\right)d\varphi = \frac{25}{4}[\varphi]_0^{2\pi} = \underline{\frac{25\pi}{2}} \ [\text{cm}^3]$$

6.33



$\tilde D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y^2 \end{cases}$

$D: \begin{cases} 0 \le z \le 1-x-y^2 \\ 0 \le x \le 1-y^2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ $\tilde D$ = proj. av D i xy-plan

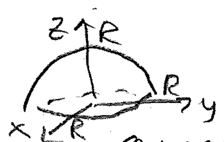
a) Volymen $V \le$ volym av kub med sida 1 $\Rightarrow V \le 1$

I xz-led är vi inom triangeln $x+z \le 1$ med area $\frac12$ $\Rightarrow \underline{V \le \frac12}$ också enkelt att se

b) $V = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{\tilde D}(1-x-y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-y^2}(1-x-y^2)\,dx\right)dy =$

$$= \int_0^1\left[x - \frac{x^2}{2} - xy^2\right]_{x=0}^{x=1-y^2} dy = \int_0^1\left(1-y^2 - \frac{(1-y^2)^2}{2} - (1-y^2)y^2\right)dy = \int_0^1\left(\frac12 - y^2 + \frac12 y^4\right)dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{10}\right]_0^1 = \frac12 - \frac13 + \frac1{10} = \underline{\frac{4}{15}}$$

6.39



a) $m = \iiint_D \rho\cdot dx\,dy\,dz = \rho\iiint_D dx\,dy\,dz = \rho\cdot\frac{2\pi R^3}{3}$ (halvt klot)

$\uparrow$ konstant massdensitet; volym

rymdpol. koord. $\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$

b) $m = \iiint_D k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\cdot\underbrace{r^2\sin\theta}_{\text{determinant}}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$

$$= k\left[\frac{r^4}{4}\right]\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = k\cdot\frac{R^4}{4}\cdot(0+1)\cdot 2\pi = k\cdot\frac{\pi R^4}{2}$$