TIPS 1.21 – 1.23 (lösningar på följande sidor)

1.21 a och c) Testa några riktningar
Sedan uppskattning/instängning eller polära koordinater

b och d) Testa några riktningar, slutsats?

1.22 a) $t = x^2+y^2$

b) $= \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x^2y} = \underbrace{\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{a)}\cdot\dfrac{1}{1+\underbrace{\boxed{\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}}_{\text{undersök}}}$

c) $\underbrace{(x+y+1)}_{\to ?}\cdot\dfrac{1}{\underbrace{\ln(x^2+2y^2)}_{\to ?}}$ [den är enkel!]

1.23 a) och b) $t = x-1$ ger $(t,y)\to(0,0)$, sedan som tidigare uppgifter

Allmänt $f\cdot g\to 0$ om $f\to 0$ och g begränsad

Polära $(x,y)\to(0,0) \iff \rho\to 0$

Lösningar

1.21 a) Test av riktningar

x-axeln ($y=0$): $f(x,0) = \dfrac{x^3}{x^2} = x \to \underline{0}$ då $x \to 0$. Nu kan vi säga att om gränsvärdet existerar är det 0.

y-axeln ($x=0$): $f(0,y) = \dfrac{y^3}{y^2} = y \to \underline{0}$, $y \to 0$ (samma värde)

linjen $y=x$: $f(x,x) = \dfrac{2x^3}{2x^2} = x \to \underline{0}$, $x \to 0$ (samma igen)

Man kan testa alla linjer $y=kx$ (utom y-axeln), k konstant:

$$f(x,kx) = \frac{x^3+k^3x^3}{x^2+k^2x^2} = \underbrace{\frac{1+k^3}{1+k^2}}_{\text{konstant}} x \to \underline{0},\ x \to 0 \quad (0 \text{ igen})$$

Byt taktik, försök visa gränsvärdet $= 0$

Metod 1 (uppskattn./instängn.)

$$0 \le \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \le \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \le \left[\begin{array}{l} |x| \le \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| \le \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right] \le \frac{2\cdot(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \to \underline{0},\ (x,y) \to (0,0)$$

$\Rightarrow$ gränsvärdet är 0

Metod 2 (polära)

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} = \underbrace{\rho}_{\to 0} \underbrace{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}_{\text{begr}} \to 0,\ \rho \to 0 \Rightarrow \text{gränsv.} = 0$$

b) Längs x-axel $f(x,0) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \to \underline{\dfrac{1}{2}}$, $x \to 0$

y-axel $f(0,y) = \dfrac{-2y^2}{y^2} = -2 \to -2$, $y \to 0$

olika värden $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar ej

c) x-axel $f(x,0) = \dfrac{x^3}{2x^2} = \dfrac{x}{2} \to 0$, $x \to 0$ y-axel $f(0,y) = \dfrac{-2y^3}{y^2} = -2y \to 0$, $y \to 0$

linje $y=kx$ $f(x,kx) = \dfrac{x^3-2k^3x^3}{2x^2+k^2x^2} = \dfrac{1-2k^3}{2+k^2} \cdot x \to 0$, $x \to 0$, 0 troligt gränsvärde?

polära $$\frac{\rho^3\cos^3\varphi - 2\rho^3\sin^3\varphi}{2\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} \underset{\text{trigettan}}{=} \underbrace{\rho}_{\to 0} \underbrace{\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{1+\cos^2\varphi}}_{\text{begr. ty nämnaren} \ge 1 \text{ (ingen risk dela med 0)}} \to \underline{\underline{0}},\ \rho \to 0$$

Knep: Modifiering av polära: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 2x^2+y^2 = \rho^2$ och fortfarande $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0$

Här fås $$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^3\cos^3\varphi - 2\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} = \underbrace{\rho}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{\cos^3\varphi}{2\sqrt{2}} - 2\sin^3\varphi\right)}_{\text{begr}} \to 0,\ \rho \to 0$$

d) $f(x,0) = \dfrac{x^2}{-x^2} = -1 \to \underline{-1}$, $x \to 0$, $f(0,y) = \dfrac{0}{y} = 0 \to \underline{0}$, $y \to 0$ olika värden $\Rightarrow$ gränsv. existerar ej

1.22 a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

b) $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^2y} = \underbrace{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\to 1 \text{ enl a)}} \frac{1}{1+\boxed{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}} \to 1 \cdot \frac{1}{1+0} = 1 \,,\ (x,y)\to(0,0)$

polära $= \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \underbrace{\rho}_{\to 0}\underbrace{\cos^2\varphi\sin\varphi}_{\text{begr}} \to 0,\ \rho\to 0$

c) $\underbrace{\ln(x^2+2y^2)}_{\to 0} \to -\infty \Rightarrow \underbrace{(x+y+1)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\ln(x^2+2y^2)}}_{\to 0} \to 1\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

1.23 a) $t = x-1 \Rightarrow$

$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{(x-1)^2+2y^2} = \lim_{(t,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{ty}{t^2+2y^2}}_{f(t,y)}$

längs t-axel $f(t,0) = \frac{0}{t^2} = \underline{0} \to 0,\ t\to 0$

längs y-axel $f(0,y) = \frac{0}{2y^2} = \underline{0} \to 0,\ y\to 0$

längs $t=y$ $f(t,t) = \frac{t^2}{t^2+2t^2} = \frac{1}{3} \to \underline{\frac{1}{3}},\ t\to 0$

olika värden $\Rightarrow$ existerar ej

b) $t=x-1$ igen ger

$\lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{ty^2}{t^2+2y^2}$, test av olika riktningar ger alltid 0

polära $\begin{cases} t=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$ ger $\frac{\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2\underbrace{(\cos^2+2\sin^2\varphi)}_{=1+\sin^2\varphi}} = \underbrace{\rho}_{\to 0}\underbrace{\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}}_{\text{begränsat ty nämnaren} \geq 1} \to \underline{0}\,,\ \rho\to 0$
