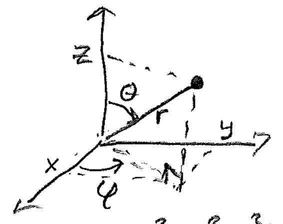
1.24)

Rymdpolära (=sfäriska) koord. $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$



$r^2 = x^2+y^2+z^2$

$r\to 0 \Leftrightarrow (x,y,z)\to(0,0,0)$

a) $$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \underbrace{\frac{r^3}{r^2}}_{=r\to 0}\underbrace{\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}_{\text{begr.}} \to \underline{\underline{0}}$$

b) $$\frac{3xz^2}{x^2+2y^2+3z^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{3r^3\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi}{r^2(1+\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta)} = \underbrace{3r}_{\to 0}\underbrace{\frac{\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi}{1+\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta}}_{\substack{\text{begränsat ty täljaren begr.} \\ \text{och nämnaren} \geq 1}} \to 0,\ r\to 0$$

$x^2+2y^2+3z^2 = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2}+y^2+2z^2$

$(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta \geq 0)$

[knep $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta\sin\varphi$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta$ ger nämnaren $= r^2$ och $(x,y,z)\to(0,0,0) \Leftrightarrow r\to 0$ fortfarande]

c) längs x-axeln $f(x,0,0) = \frac{x}{3x^2} = \frac{1}{3x} \to \begin{cases}\infty, & x\to 0^+ \\ -\infty, & x\to 0^-\end{cases}$ $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar ej

---

1.25) $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty \Leftrightarrow \rho\to\infty$

a) $$\underbrace{\sin(x^2y^2)}_{\text{begr.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2x^2+3y^2}}_{\to 0} \to \underline{\underline{0}}$$

b) $$\frac{x^2+y^2}{x^2+x+y^2} = \frac{1}{1+\frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{1}{1+\frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}} = \frac{1}{1+\frac{\cos\varphi}{\rho}} \to \frac{1}{1+0} = \underline{\underline{1}},\ \rho\to\infty$$

c) $$xye^{-x^2-y^2} = \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\text{begr.}}\underbrace{\rho^2e^{-\rho^2}}_{\to 0} \to \underline{\underline{0}},\ \rho\to\infty \quad \left[\text{envar: } \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}\to 0,\ \rho\to\infty\right]$$

1.26) lurig!

Rät linje (utom y-axeln) $y=kx$, $$f(x,kx) = \frac{k^4x^4}{k^4x^4+(kx-x^2)^2} = \frac{k^4x^2}{k^4x^2+(k-x)^2} \to \frac{k^4\cdot 0}{k^4\cdot 0+(k-0)^2} = \frac{0}{k^2} = \underline{0},\ x\to 0 \text{ om } k\neq 0$$

$k=0$ (x-axeln) får tas separat: $f(x,0) = \frac{0}{0+(0-x^2)^2} = 0 \to \underline{0},\ x\to 0$

y-axeln: $f(0,y) = \frac{y^4}{y^4+y^2} = \frac{y^2}{y^2+1} \to \frac{0}{0+1} = \underline{0},\ y\to 0$ $\Rightarrow f\to 0$ om vi går mot $(0,0)$ längs rät linje

Men, om vi går längs $y=x^2$ (böjd kurva som går genom $(0,0)$):

$f(x,x^2) = \frac{x^8}{x^8+0} = 1 \to \underline{\underline{1}},\ x\to 0$, annat värde än 0 $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar ej

$f(x,y)$ är <u>kontinuerlig</u> i (a,b) om $f(x,y) \to \underbrace{f(a,b)}_{\text{behöver ha ett värde}}$ då $(x,y) \to (a,b)$

1.28) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$, kontinuerlig utanför $(0,0)$ eftersom x^2+y^2 är en kontinuerlig funktion

I origo? $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0 \neq 1 = f(0,0) \Rightarrow$ ej kont. i $(0,0)$.

Ändra $f(0,0)=1$ till $f(0,0)=0$ så blir f kont. överallt (då är $f(x,y)=x^2+y^2$ överallt)

1.29) a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ är kont. utanför origo, och $\to 1$ då $(x,y) \to (0,0)$.

Sätt $f(0,0)=1$, d.v.s. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow f$ kont. överallt

b) $x^2+3y^2+2xy = (x+y)^2+2y^2 = 0 \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{(2x+y)^2}{x^2+3y^2+2xy}$ är definierad och kontinuerlig utanför $(0,0)$.

Existerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Längs x-axel $f(x,0) = \dfrac{4x^2}{x^2} = 4 \to \underline{4}, x \to 0$ $\Rightarrow$ existerar ej (olika värden)

y-axel $f(0,y) = \dfrac{y^2}{3y^2} = \dfrac{1}{3} \to \underline{\dfrac{1}{3}}, y \to 0$

Då kan vi inte ge värde på $f(0,0)$ så att $f(x,y)$ blir kont. överallt

1.30) a) Längs x-axel $f(x,0,0) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \to \underline{\dfrac{1}{2}}, x \to 0$ Olika värden $\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ existerar ej $\Rightarrow$ svar nej

Längs y-axel $f(0,y,0) = \dfrac{y^3}{y^2} = y \to \underline{0}, y \to 0$

b) $\dfrac{xyz+yz}{x^2+y^2+z^2+2x+1} = \dfrac{(x+1)yz}{(x+1)^2+y^2+z^2}$ är definierad och kontinuerlig för $(x,y,z) \neq (-1,0,0)$

gränsvärde då $(x,y,z) \to (-1,0,0)$?

Sätt $x+1=t \Rightarrow (t,y,z) \to (0,0,0)$

$$\frac{tyz}{t^2+y^2+z^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rymdpolära} \\ \text{för } t,y,z)}}{=} \underbrace{\frac{r^3}{r^2}}_{=r\to 0} \underbrace{\sin^2\theta\cos\theta \cdot \cos\varphi\sin\varphi}_{\text{begr.}} \to \underline{0}, \ r \to 0 \text{ (existerar)}$$

$\Rightarrow$ sätt $f(-1,0,0)=0$ så blir $f(x,y,z)$ kont. överallt