Tips & lösn 2.7, 2.8

Ekvationerna $\begin{cases} z'_x = p(x,y) \\ z'_y = q(x,y) \end{cases}$ är lösbara $\Leftrightarrow$ $p'_y = q'_x$. Kan kontrolleras innan man börja lösa.

$z(x,y)$ kallas potential till vektorn (p,q)

2.7a) $\begin{cases} z'_x = 2x+y = p \quad (1) \\ z'_y = x+2y = q \quad (2) \end{cases}$ $\begin{matrix} p'_y = 1 \\ q'_x = 1 \end{matrix}$ lika, lösn. finns

$(1) \underset{x\text{-primitiv}}{\Longrightarrow} z(x,y) = x^2 + xy + \underbrace{f(y)}_{\text{godtycklig envar-funktion av } y} \xrightarrow{\text{derivera på } y} z'_y = 0 + x + f'(y) \underset{\text{jämför med (2)}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow x + f'(y) = x + 2y \Rightarrow f'(y) = 2y \Rightarrow f(y) = y^2 + C$, C godt. konstant

$\Rightarrow \underline{z(x,y) = x^2 + xy + y^2 + C}$

2.7b) $\begin{cases} z'_x = p = e^{xy} \quad (1) \\ z'_y = q = e^{xy} \quad (2) \end{cases}$ $\begin{matrix} p'_y = xe^{xy} \\ q'_x = ye^{xy} \end{matrix}$ olika $\Rightarrow$ lösn. saknas

Kan också upptäckas genom lösande på vanligt sätt:

$(1) \underset{x\text{-primitiv}}{\Longrightarrow} z(x,y) = \frac{1}{y}e^{xy} + f(y) \underset{\substack{y\text{-deriv.} \\ \text{(produktregel)}}}{\Longrightarrow} z'_y = -\frac{1}{y^2}e^{xy} + \frac{x}{y}e^{xy} + f'(y)$

$\underset{\text{jämför (2)}}{\Longrightarrow} \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{x}{y}\right)e^{xy} + f'(y) = e^{xy} \Rightarrow \underbrace{f'(y)}_{\text{får bara bero på } y} = \underbrace{e^{xy}\left(1 - \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)}_{\text{beror på } x}$ olösbart

2.7c) $\begin{cases} z'_x = ye^x \quad (1) \\ z'_y = 1 + e^x \quad (2) \end{cases}$ $(1) \Rightarrow z(x,y) = ye^x + f(y) \Rightarrow z'_y = e^x + f'(y)$ jämför (2)

$\Rightarrow 1 + e^x = e^x + f'(y) \Rightarrow f'(y) = 1 \Rightarrow f(y) = y + C \Rightarrow$

$\underline{z(x,y) = ye^x + y + C}$

2.8) $p = ye^{x^2y^4} \underset{\text{produktregel}}{\Longrightarrow} p'_y = (1 + y \cdot 4x^2y^3) \cdot e^{x^2y^4} = (1 + \underline{4x^2y^4})e^{x^2y^4}$

$q = xe^{x^2y^4} \Rightarrow q'_x = (1 + x \cdot 2x \cdot y^4)e^{x^2y^4} = (1 + \underline{2x^2y^4})e^{x^2y^4}$

olika $\Rightarrow$ ingen lösn. $z(x,y)$ finns