# 2.13, 14, 16, 17 differentialer

2.13 tips: Def är för $f(x,y,z)$ att $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

så $f'_x$, $f'_y$ och $f'_z$ ska beräknas

För $f(p,V,T)$ är $df = f'_p dp + f'_V dV + f'_T dT$

2.14 $P(U,R) = \frac{U^2}{R}$ Ändring $\Delta P$ i $P$ då $U$ och $R$ ändras med små $\Delta U$ och $\Delta R$:

$$\Delta P \approx dP(\Delta U, \Delta R) = P'_U \Delta U + P'_R \Delta R = \frac{2U}{R}\Delta U - \frac{U^2}{R^2}\Delta R$$

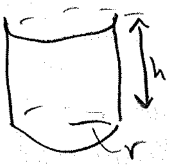
Om $U = 10$, $R = 2$ är $P = \frac{10^2}{2} = 50$ och $\Delta P \approx \frac{20}{2}\Delta U - \frac{100}{4}\Delta R = 10\Delta U - 25\Delta R$

Med $\Delta U = 0.3$ (ökning med 0.3 V) och $\Delta R = 0.1$ (ökn. med $0.1\Omega$) blir

$$\Delta P \approx 10 \cdot 0.3 - 25 \cdot 0.1 = 3 - 2.5 = 0.5 \text{ (W)}$$

$\Delta R = 0.2$ (& $\Delta U = 0.3$) ger $\Delta P = 10 \cdot 0.3 - 25 \cdot 0.2 = \underbrace{-2}$ (W)

P minskar då $\Delta P$ negativ

2.16  Volym = bottenarea · höjd $= \pi r^2 h = V(r,h)$

Ändring $\Delta V$ vid små ändringar $\Delta r$ och $\Delta h$ i $r$ och $h$:

$$\Delta V \approx V'_r \Delta r + V'_h \Delta h = 2\pi r \cdot h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

I denna uppgift ökas radien med 3%, betyder att $\frac{\Delta r}{r} = 0.03$

Höjden minskas med 1%: $\frac{\Delta h}{h} = -0.01$

Volymändring i % : $\frac{\Delta V}{V} = \frac{2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h}{\pi r^2 h} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \cdot 0.03 - 0.01 = 0.05$

dvs ökar 5%

2.17 Enligt def. av differentierbarhet ska

$$\rho(h,k) \underset{def.}{=} \frac{f(1+h,2+k) - f(1,2) - f'_x(1,2)h - f'_y(1,2)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0)$$

Vi har $f(x,y) = xy \Rightarrow f'_x(x,y) = y$, $f'_y(x,y) = x$ så $f(1,2) = 2$, $f(1+h, 2+k) = (1+h)(2+k)$

$f'_x(1,2) = 2$, $f'_y(1,2) = 1$, vilket ger

$$\rho(h,k) = \frac{(1+h)(2+k) - 2 - 2h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \Big/ \begin{matrix}\text{polära } r, \varphi \\ (\rho \text{ upptagen bokstav})\end{matrix} \Big/ =$$

$$= \frac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r} = \underbrace{r}_{\to 0}\underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{begr} \to \underline{\underline{0}} \text{ då } (h,k) \to (0,0)$$

$\Rightarrow f$ differentierbar i $(1,2)$