Tips 2.19, 20, 21, 11, 22, 26 (några lösta på följande sidor)

2.19 a) Inre derivata på x: 1, inre derivata på y: -1

b) $f(x-y)$, inre derivator som i a)

2.20 Inre deriv. på x: $\frac{1}{y}$, på y: $-\frac{x}{y^2}$

$$\frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

2.21 Kedjeregeln $\begin{cases} z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x \\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v \cdot v'_y \end{cases}$

2.11 c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \underset{\text{godt}}{f(y)} \Rightarrow z = \ldots$

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = f(y) \Rightarrow z = \ldots$

2.22 a) kedjeregeln ger ..... $z'_v = 0 \Rightarrow z = f(u) = f(x-y)$

b) $x = 0$ ger $z(0,y) = f(-y) = y - \cos y$, sätt $t = -y \Rightarrow f(t) = \ldots$

sedan $t = x - y \Rightarrow z = f(x-y) = \ldots$

2.26 översätt till ekvation i u, v med kedjeregeln

Obs $-1-x = -1-\frac{u}{y^2} = -1-\frac{u}{v^2}$, måste också översättas till u, v

Godtyckliga funktionen i lösn. utan bivillkor bestäms då bivillkor införs $z(1,y) = \ldots$ (sätt in $x=1$). $t = y^2$ användbart.

Lösningar 2.19bc, 2.20, 2.21b, 2.11a-d, 2.22, 2.26

2.19b) $z(x,y) = f(x-y) \Rightarrow z'_x = f'(x-y)\cdot \underbrace{1}_{\text{inre deriv. på } x}$, $z'_y = f'(x-y)\cdot \underbrace{(-1)}_{\text{inre på } y}$

$\Rightarrow z'_x + z'_y = f'(x-y) - f'(x-y) = 0$ för alla (envar.-)funktioner f

c) $f(x-y) = 1+(x-y)e^{-x+y} = 1+(x-y)e^{-(x-y)} \Rightarrow f(t) = 1+te^{-t}$

2.20) $z(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow z'_x = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{\text{inre på } x}$, $z'_y = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot \underbrace{\frac{-x}{y^2}}_{\text{inre på } y} \Rightarrow$

$x z'_x + y z'_y = \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad \forall f$

$\frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}} = t - \frac{1}{t}$ om $t = \frac{x}{y} \Rightarrow f(t) = t - \frac{1}{t}$

2.21b) $\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ $\begin{cases} z'_x = z'_u \cdot \underbrace{u'_x}_{2x} + z'_v \cdot \underbrace{v'_x}_{2y} = 2xz'_u + 2yz'_v \\ z'_y = z'_u \underbrace{u'_y}_{-2y} + z'_v \cdot \underbrace{v'_y}_{2x} = -2yz'_u + 2xz'_v \end{cases}$

2.11 a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \underset{x\text{-primitiv}}{\Rightarrow} z = f(y)$, f godtycklig envar-funktion

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \underset{y\text{-prim.}}{\Rightarrow} z = f(x)$, f godt.

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \underset{x\text{-prim.}}{\Rightarrow} \frac{\partial z}{\partial x} = f(y) \underset{x\text{-prim}}{\Rightarrow} z = f(y)\cdot x + g(y)$

f och g godt.

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \underset{x\text{-prim.}}{\Rightarrow} \frac{\partial z}{\partial y} = f(y) \underset{\substack{y\text{-prim} \\ (F'=f)}}{\Rightarrow} z = F(y) + g(x)$

F och g godt.

2.22 $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ Kedjeregeln $\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot 1 \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot (-1) + z'_v \cdot 1 \end{aligned}$

a)

$\Rightarrow z'_x + z'_y = (z'_u + z'_v) + (-z'_u + z'_v) = 2z'_v \quad \Rightarrow$

$z'_x + z'_y = 0 \Leftrightarrow z'_v = 0 \quad \Rightarrow z = f(u) = \underline{f(x-y)}$, f godt.

[Alla uttryck $f(x-y)$ uppfyller $z'_x + z'_y = 0$]

b) Bivillkor $z(0,y) = y - \cos y \quad \Rightarrow f(0-y) = y - \cos y$

Sätt $t = -y \Rightarrow f(t) = -t \underbrace{-\cos(-t)}_{=\cos t} \underset{t=x-y}{\Rightarrow} f(x-y) = -(x-y) - \cos(x-y)$

så $\underline{z = y - x - \cos(x-y)}$

2.26 Partiell differentialekvation $2x z'_x - y z'_y = y + xy$

Bivillkor $z(1,y) = e^{-y}$ $(y>0)$

Variabelbyte $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y^2 z'_u + 0 \cdot z'_v \\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v \cdot v'_y = 2xy z'_u + 1 \cdot z'_v \end{cases}$ insatt i ekv. $\Rightarrow$

$\cancel{2xy^2 z'_u} - y(\cancel{2xy z'_u} + z'_v) = y + xy \Leftrightarrow -y z'_v = y(1+x) \quad \Rightarrow$

$z'_v = -1 - x = \Big/ \begin{matrix} x = u/y^2 = \\ = u/v^2 \end{matrix} \Big/ = -1 - \frac{u}{v^2}$

Ny enklare diff.ekv. $z'_v = -1 - \frac{u}{v^2}$ (endast derivata på v)

v-primitiv $\Rightarrow z = -v + \frac{u}{v} + \underset{\uparrow \text{ godt.}}{f(u)} = \underline{-y + xy + f(xy^2)}$ lösning utan bivillkor

[t.ex. $-y + xy + e^{xy^2}$, $-y + xy + \sin(xy^2)$, $-y + xy + (xy^2)^5$ är lösningar]

$z(1,y) = e^{-y}$ ger då $-y + 1 \cdot y + f(1 \cdot y^2) = e^{-y} \Rightarrow f(y^2) = e^{-y}$ $(y>0)$

$t = y^2 \Rightarrow f(t) = e^{-\sqrt{t}}$

$t = xy^2 \Rightarrow f(xy^2) = e^{-\sqrt{xy^2}} \underset{(y>0)}{=} e^{-y\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{z = -y + xy + e^{-y\sqrt{x}}}}$